Prof. Dr. Oleg Bogopolski
Carsten Feldkamp
Christoph Bärligea

Abgabe: 27.04. Besprechung: 3.05 und 4.05

Lineare Algebra II
Übungsblatt 2

Aufgabe 1. Sei [1+7 P.]

$$A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

(a) Überprüfen Sie, dass A eine Orthogonalmatrix ist.

(b) Finden Sie die Standardform B der Matrix A und eine Orthogonalmatrix C, so dass gilt

$$B = C^t AC.$$

Hier ist C^t die transponierte Matrix zu C.

Aufgabe 2. Sei [8 P.]

$$A = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4}i & -\frac{\sqrt{3}}{4}i \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4}i & -\frac{\sqrt{3}}{4}i \\ \frac{\sqrt{3}}{4}i & \frac{\sqrt{3}}{4}i & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{\sqrt{3}}{4}i & -\frac{\sqrt{3}}{4}i & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}.$$

Folgendes ist bekannt:
- A ist eine unitäre Matrix.
- $\chi_A(\lambda) = (\lambda - 1)^2\Big(\lambda - (\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i)\Big)\Big(\lambda - (\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i)\Big)$.
- Der Eigenraum $\mathrm{Eig}(A, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i)$ ist die lineare Hülle des Vektors $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Finden Sie die Standardform B der unitären Matrix A und eine unitäre Matrix C, so dass gilt

$$B = \overline{C^t}AC.$$

Hinweis. Es ist leicht, eine Basis von $\mathrm{Eig}(A, 1)$ zu finden. Danach kann man leicht erahnen, was eine Basis von $\mathrm{Eig}(A, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i)$ ist. Sie dürfen erahnen; eine Begründung muss aber gegeben werden.

Fortsetzung Seite 2.

Aufgabe 3. Sei [8 P.]

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Wir betrachten diese Matrix als eine unitäre Matrix. Finden Sie die Standardform B der unitären Matrix A und eine unitäre Matrix C, so dass gilt

$$B = \overline{C^t} AC.$$

Aufgabe 4. Sei V ein Euklidischer (unitärer) Vektorraum und $\varphi : V \to V$ eine lineare Abbildung. Beweisen Sie: [8 P.]

φ ist orthogonal (unitär) genau dann, wenn φ die Längen von Vektoren erhält (d.h. es gilt $||\varphi(x)|| = ||x||$ für alle $x \in V$).

Aufgabe 5. Sei V ein endlichdimensionaler Euklidischer (unitärer) Raum. Seien x, y zwei Vektoren von V. Beweisen Sie: [8 P.]

Wenn $||x|| = ||y||$ ist, dann existiert eine orthogonale (unitäre) Abbildung $\varphi : V \to V$, die x nach y abbildet.