Prof. Dr. Oleg Bogopolski
Carsten Feldkamp
Christoph Bärligea

Abgabe: 20.04. Besprechung: 26.04 und 27.04

# Lineare Algebra II
## Übungsblatt 1

**Aufgabe 1.** Wenden Sie das Gram - Schmidt Verfahren auf die folgenden Vektoren aus $\mathbb{C}^4$ an: [8 P.]

$$c_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c_2 = \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 0 \\ i \end{pmatrix}, \quad c_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

**Aufgabe 2.** Sei [3+3+2P.]

$$A = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}\cdot i}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{\sqrt{2}\cdot i}{2} \\ \frac{\sqrt{2}\cdot i}{2} & \frac{\sqrt{2}\cdot i}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Man kann überprüfen, dass $A$ eine unitäre Matrix ist, d.h. $A\overline{A}^t = E$ ist.

(a) Finden Sie alle Eigenwerte von $A$.

(b) Finden Sie Basen aller Eigenräume von $A$.

(c) Überprüfen Sie unmittelbar (ohne Verwendung entsprechender Sätze), dass Eigenräume zu verschiedenen Eigenwerten von $A$ orthogonal zueinander sind.

**Aufgabe 3.** Wir betrachten die Abbildung $||\cdot|| : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $||(x_1, x_2)|| := |x_1| + |x_2|$. Beweisen Sie: [4+4 P.]

(a) Diese Abbildung ist eine Norm.

(b) Diese Norm ist von keinem Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$ induziert.

*Hinweis zu* (b). Es reicht, ein Gegenbeispiel zur Formel

$$||x-y||^2 + ||x+y||^2 = 2(||x||^2 + ||y||^2)$$

aus dem Satz 1.4.4 zu finden.

**Aufgabe 4.** Seien $U, V$ zwei Untervektorräume eines endlichdimensionalen $K$-Vektorraums. Beweisen Sie: [4+4 P.]

(a) $(U+V)^\perp = U^\perp \cap V^\perp$.

(b) $(U \cap V)^\perp = U^\perp + V^\perp$.

**Fortsetzung Seite 2.**

Willkommen in der Mathematik!

*Definition 1.* Sei $X$ eine beliebige Menge. Eine Abbildung $d : X \times X \to \mathbb{R}$ heißt *Metrik auf* $X$, wenn für alle $x, y, z \in X$ die folgenden Axiome erfüllt sind:

(1) $d(x, y) \geqslant 0$ und $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$, (Positive Definitheit)

(2) $d(x, y) = d(y, x)$, (Symmetrie)

(3) $d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y)$. (Dreiecksungleichung)

*Definition 2.* Fur eine fest vorgegebene Primzahl $p$ definieren wir den *$p$-adischen Betrag* auf $\mathbb{Q}$ wie folgt.
Jedes $x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ lasst sich eindeutig in der Form $x = \pm\frac{a}{b} \cdot p^n$ schreiben, wobei $a, b \in \mathbb{N}$ und $ggT(a, p) = ggT(b, p) = 1$ ist. Wir setzen dann

$$|x|_p := p^{-n} \text{ und } |0|_p := 0.$$

Zum Beispiel ist $|\frac{63}{95}|_3 = 3^{-2}$, $|\frac{95}{63}|_3 = 3^2$, $|\frac{95}{63}|_{17} = |\frac{63}{95}|_{17} = 1$.

**Aufgabe 5.** Sei $p$ eine Primzahl. Wir definieren eine Abbildung $d_p : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ durch $d_p(x, y) = |x - y|_p$. Man kann beweisen, dass $d_p$ eine Metrik auf $\mathbb{Q}$ ist. [4+4 P.]

(a) Berechnen Sie $d_3(1, 10^{2017})$.

(b) Ordnen Sie die Zahlen $d_3(1, 10^8)$, $d_3(1, 10^9)$, $d_3(1, 10^{10})$ nach Steigerung.

Begründung ist erforderlich.