Prof. Dr. Oleg Bogopolski
Carsten Feldkamp

Abgabe 13.07. Besprechung: 19.07 und 20.07

Lineare Algebra II

Übungsblatt 13 (= Tutoriumsblatt = Probeklausur [ein Teil])

Bitte schreiben Sie auf dem Deckblatt (zum downloaden auf der Webseite des Kurses), ob Sie den Tutoriumsschein brauchen. Um den Tutoriumsschein zu bekommen, müssen Sie mindestens 24 Punkte erreichen. In der Klausur können noch 2 Aufgaben vorgeschlagen werden: eine MC-Aufgabe und eine theoretische Aufgabe. Die Liste der Themen ist auf der Webseite zu finden.

Aufgabe 1. Sei [4+4 P.]

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 4 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

eine Matrix aus $\mathrm{Mat}(3, 3, \mathbb{C})$.

(a) Finden Sie eine invertierbare Matrix T und eine Jordanmatrix J in $\mathrm{Mat}(3, 3, \mathbb{C})$, so dass $T^{-1}AT = J$ gilt.

(b) Für die Funktion $f(x) = (\ln(x))^2$, $x > 0$, berechnen Sie $f(A)$.

Aufgabe 2. Sei [8 P.]

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

eine reelle Matrix. Finden Sie die Cholesky-Zerlegung von A.

Aufgabe 3. Sei [4+4 P.]

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

eine reelle Matrix.

(a) Bestimmen Sie mit Hilfe des Sylvester-Kriteriums, ob die Matrix $A - 6E$ <u>negativ</u> definit ist.

(b) Finden Sie eine Orthogonalmatrix Q und eine Diagonalmatrix D, so dass $Q^t AQ = D$ gilt.

Aufgabe 4. Sei $f(x) = x^3 - 3x - 1$. [4+4 P.]

(a) Wie viele reelle Nullstellen hat $f(x)$?

(b) Separieren Sie die reellen Nullstellen von $f(x)$.

Aufgabe 5. Gegeben seien vier Vektoren in $\mathbb{C}^2$: [8 P.]

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 2+i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Finden Sie die Spektralnorm $||\varphi||_2'$ der linearen Abbildung $\varphi : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$, die v_i nach u_i abbildet, $i = 1, 2$.