Prof. Dr. Oleg Bogopolski
Carsten Feldkamp

Abgabe 22.06. Besprechung: 28.06 und 29.06

# Lineare Algebra II

## Übungsblatt 10

Aufgabe 4 kann nach der Vorlesung am kommenden Montag gelöst werden.

**Aufgabe 1.** Sei $f(x) = x^3 + 6x^2 + 6x - 6$. Benutzen Sie das Sturm-Verfahren, um die folgenden Teilaufgaben zu lösen. [4+2+4 P.]

(a) Wie viele reelle Nullstellen hat $f(x)$?

(b) Geben Sie ein Intervall $[a, b]$ an, in dem alle reellen Nullstellen von $f(x)$ liegen.

(c) Separieren Sie alle reellen Nulstellen von $f(x)$.

*Hinweis.* Man separiert Nullstellen, indem man disjunkte Intervalle $(a, b]$ findet, so dass jedes Intervall genau eine Nullstelle enthält.

**Aufgabe 2.** Beweisen Sie: [4+4+2 P.]

(a) Der Faktorring $\mathbb{R}[x]/\langle x^2 + x + 2\rangle$ ist ein Körper, der zum Körper $\mathbb{C}$ isomorph ist.

(b) $\mathbb{R}[x]/\langle x^2 - 1\rangle \cong \mathbb{R}[x]/\langle x - 1\rangle \oplus \mathbb{R}[x]/\langle x + 1\rangle \cong \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$

(c) Beweisen Sie, dass $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$ kein Körper ist.

*Hinweis.* Für zwei Ringe $R$, $S$ sei die *dirkte Summe* $R \oplus S$ definiert als die Menge aller Paar $(r, s)$ mit $r \in R$ und $s \in S$. Wir statten diese Menge mit der komponentenweisen Addition und Multiplikation aus. Dadurch wird $R \oplus S$ zu einem Ring.

**Aufgabe 3.** Gegeben sind die Polynome $f(x) = x^5 + 1$ und $g(x) = x^3 + 2$. Finden Sie das Polynom $G(x) = \mathrm{ggT}(f(x), g(x))$ und zwei Polynome $u(x), v(x) \in \mathbb{R}[x]$, so dass gilt: [8 P.]

$$f(x)u(x) + g(x)v(x) = G(x).$$

**Aufgabe 4.** [4+4+4 P.]

(a) Drücken Sie $x_1^3+x_2^3+x_3^3$ als ein Polynom von elementaren symmetrischen Polynomen $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ aus.

(b) Beweisen Sie, dass

$$\frac{x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - 3x_1x_2x_3}{x_1 + x_2 + x_3}$$

ein Polynom ist.

(c) Seien $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ Nullstellen des Polynoms $x^3 - x^2 + 2x - 3 \in \mathbb{C}[x]$. Berechnen Sie

$$\alpha_1^3 + \alpha_2^3 + \alpha_3^3.$$