

Kummertheorie und der Fermat'sche Satz
(SoSe 2021)

Übungsblatt 8

Aufgabe 1. Sei $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-1})$ und sei $p \in \text{Prim}(\mathbb{N})$. Beweisen Sie:

8P

$$p \in \text{Prim}(\mathcal{O}_K) \iff \left(\frac{-1}{p}\right) = -1.$$

Aufgabe 2. Sei $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-5})$. Wir betrachten die folgenden Ideale in \mathcal{O}_K :

22P

$$\alpha = (2, 1 + \sqrt{-5}), \quad \beta = (3, 1 + \sqrt{-5}), \quad \gamma = (3, 1 - \sqrt{-5}).$$

Beweisen Sie:

1) α und β sind Primideale in \mathcal{O}_K .

[5 Punkte]

2) $\alpha\beta = \alpha \cap \beta$.

[5 Punkte]

3)

a) $(2) = \alpha^2$,

[3 Punkte]

b) $(3) = \beta\gamma$,

[3 Punkte]

c) $(1 + \sqrt{-5}) = \alpha\beta$,

[3 Punkte]

d) $(1 - \sqrt{-5}) = \alpha\gamma$.

[3 Punkte]

Hinweis zu 1): Beweisen Sie, dass α genau 2 Nebenklassen in \mathcal{O}_K hat und β genau 3 Nebenklassen in \mathcal{O}_K hat. Benutzen Sie Satz 6.7.