Prof. Dr. Oleg Bogopolski — Abgabe: Fr., 25.06.2021, bis 8:45 Uhr

Kummertheorie und der Fermat'sche Satz
(SoSe 2021)

Übungsblatt 10

Aufgabe 1. Sei $K = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{5})$. Folgendes ist bekannt:

$$\mathcal{O}_K = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\sqrt[3]{5} + \mathbb{Z}(\sqrt[3]{5}\,)^2.$$

1) Sei $\alpha := \sqrt[3]{5}$. Beweisen Sie, dass der Faktorring $\mathcal{O}_K/(2)$ aus genau 8 Nebenklassen besteht und die Repräsentanten dieser Nebenklassen sind **6P**

$$0, 1, \alpha, 1+\alpha,\ \alpha^2, 1+\alpha^2, \alpha+\alpha^2, 1+\alpha+\alpha^2.$$

2) Finden Sie zwei nichtnullsche Repräsentanten, deren Produkt gleich 0 modulo (2) ist. Nach Satz 16.6 ist dann das Ideal (2) kein Primideal. **4P**

3) Prüfen Sie nach, dass $(2) = (2, 1+\alpha)\cdot(2, 1+\alpha+\alpha^2)$ ist. **2P**

4) Beweisen Sie, dass der Faktorring $\mathcal{O}_K/(2, 1+\alpha)$ aus 2 Elementen besteht. **6P**

5) Beweisen Sie, dass der Faktorring $\mathcal{O}_K/(2, 1+\alpha)$ nullteilerfrei ist. **2P**

6) Beweisen Sie, dass der Faktorring $\mathcal{O}_K/(2, 1+\alpha+\alpha^2)$ aus 4 Elementen besteht. **6P**

7) Beweisen Sie, dass der Faktorring $\mathcal{O}_K/(2, 1+\alpha+\alpha^2)$ nullteilerfrei ist. **4P**

Bemerkung. Aus 3)-7) folgt, dass das Ideal (2) in $\mathcal{O}_K$ das Produkt von zwei Primidealen ist:

$$(2) = (2, 1+\alpha)\cdot(2, 1+\alpha+\alpha^2).$$