

**Kummertheorie und der Fermat'sche Satz**  
(SoSe 2021)

Übungsblatt 1

**Aufgabe 1.** Sei  $E = \mathbb{Q}(\alpha)$ , wobei  $\alpha$  die Gleichung  $\alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 2 = 0$  erfüllt. **4+4P.**  
Schreiben Sie das Folgende in der Form  $a\alpha^2 + b\alpha + c$  mit  $a, b, c \in \mathbb{Q}$ .

a)  $(\alpha^2 + \alpha + 1)(\alpha^2 + \alpha)$ ,

b)  $(\alpha - 1)^{-1}$ .

**Aufgabe 2.** Finden Sie das minimale Polynom  $m_\alpha(x)$  für  $\alpha = \sqrt{2} - 2\sqrt{3}$  über  $\mathbb{Q}$ . **8P.**

**Aufgabe 3.** Sei  $E = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, i)$ . Finden Sie  $[E : \mathbb{Q}]$  und ein Element  $\alpha \in E$ , so dass  $E = \mathbb{Q}(\alpha)$  gilt. **8P.**

**Aufgabe 4.** Ist das Polynom  $x^4 + 4$  irreduzibel über  $\mathbb{Q}$ ? **8P.**

**Aufgabe 5.** Sei  $p$  eine Primzahl. Beweisen Sie, dass das Polynom  $x^{p-1} + x^{p-2} + \dots + x + 1$  irreduzibel über  $\mathbb{Z}$  ist. **8P.**

*Hinweis.* Substitution von  $x + 1$  statt  $x$  & Eisenstein-Kriterium (s. Kurzsript).