Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Oleg Bogopolski

WS 2014/15
4.03.2015

Zweite Klausur Fuchssche und Kleinsche Gruppen

Aufgabe 1.

(a) Geben Sie Definitionen von elliptischen, parabolischen und hyperbolischen Elementen von $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$. [2 P.]

(b) Geben Sie kanonische Matrizen für diese Typen der Elemente. [2 P.]

(c) Beschreiben Sie mit Bildern die Dynamik der Wirkung dieser Typen von Elementen auf $\widehat{\mathbb{H}}$. [3 P.]

Aufgabe 2.

(a) Berechnen Sie den hyperbolischen Abstand von $A = i$ bis zur euklidschen Strecke [5 P.]

$$BC = \{i + t | 1 \leqslant t \leqslant 2\}.$$

(b) Berechnen Sie die hyperbolische Länge der euklidschen Strecke mit den Eckpunkten $A = 1 + i$ und $B = 2 + 3i$. [5 P.]

(c) Berechnen Sie den hyperbolischen Flächeninhalt des euklidschen Dreiecks ABC, wobei $A = i$, $B = 1 + i$ und $C = 1 + 2i$ ist. [5 P.]

Aufgabe 3.

(a) Formulieren Sie den Satz von Jorgensen. [3 P.]

(b) Die folgende Matrix ist elliptisch und hat die Ordnung 7 in $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$:

$$A = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{7} & -\sin\frac{\pi}{7} \\ \sin\frac{\pi}{7} & \cos\frac{\pi}{7} \end{pmatrix}.$$

Finden Sie eine elliptische Matrix

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

der Ordnung 2 in $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$, so dass $G := \langle A, B\rangle$ nicht diskret und nicht elementar ist. [5 P.]

(c) Seien C_1 und C_2 zwei Möbiustransformationen der Ordnung 2 mit verschiedenen Fixpunkten in $\mathbb{H}$. Beweisen Sie, dass die Gruppe $\langle C_1, C_2\rangle$ diskret und elementar ist. [5 P.]

Hinweis zu (b):
- $\mathrm{Tr}(ABA^{-1}B^{-1}) = 2 + ((a-d)^2 + (b+c)^2)\sin^2(\frac{\pi}{7})$.
- Wenn X elliptisch ist, dann ist $Y^{-1}XY$ auch elliptisch.

Aufgabe 4. Seien

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Es ist bekannt, dass der Kern des natürlichen Epimomorphismus $\varphi : \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) \to \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}_\mathbf{2})$ gleich $\langle A^2, B^2\rangle$ ist und dass $|\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}_2)| = 6$ ist. Sei $G := \langle A, B^2\rangle$.

(a) Beweisen Sie, dass der Index von G in $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ gleich 3 ist. [5P.]

(b) Es ist bekannt, dass $1, C, C^2$ Repräsentanten der rechten Nebenklassen von G in $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ sind. Malen Sie einen Fundamentalbereich für G in $\mathbb{H}$. [5P.]