Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Oleg Bogopolski

WS 2014/15
13.02.2015

Lösungen zu Klausur Fuchssche und Kleinsche Gruppen

Aufgabe 1.

(a) Sei ℓ die Geodäte in $\mathbb{H}$, die durch 0 und ∞ läuft. Für jeden Punkt $w \in \mathbb{H}$ sei w' der Punkt auf l mit minimalem hyperbolischem Abstand von w. Beweisen Sie, dass die Geodäten ℓ und $[w, w']$ sich unter rechten Winkel treffen. [5 P.]

(b) Berechnen Sie den hyperbolischen Abstand von $w := 3 + 4i$ bis ℓ. [5 P.]

(c) Berechnen Sie die hyperbolische Länge des euklidschen Segments von $w = 3 + 4i$ bis $4i$. [5 P.]

(d) Berechnen Sie den hyperbolischen Flächeninhalt des hyperbolischen Dreiecks OAB, wobei $O = 0$, $A = 3 + 4i$ und $B = 5i$ ist. [5 P.]

Lösung.

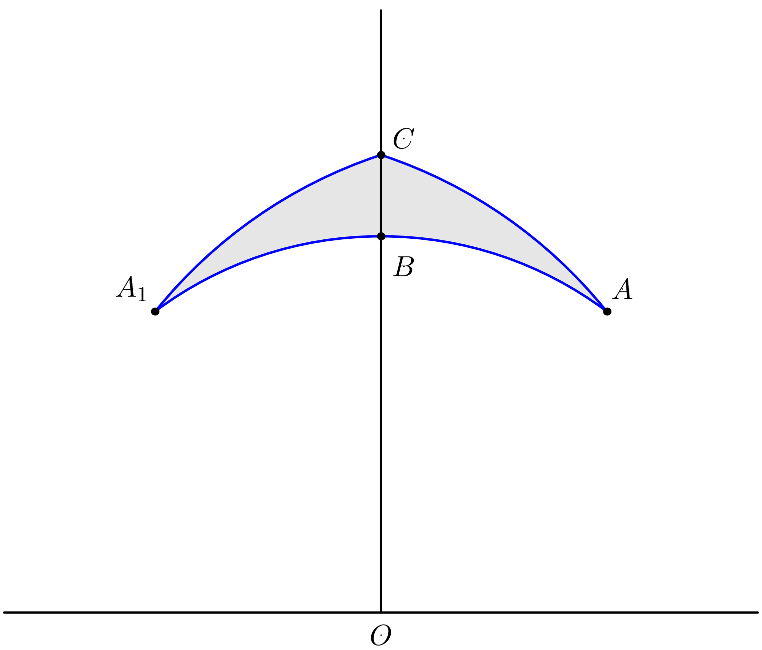
(a) Wir bezeichnen $A = w$. Sei B der Punkt auf ℓ, so dass ℓ und das geodäte Segment $[B, A]$ sich unter rechten Winkel treffen. Wir beweisen, dass für alle $C \in \ell \setminus \{B\}$ gilt

$$\rho(B, A) < \rho(C, A).$$

Sei A_1 der symmetrische Punkt zu A (bezüglich ℓ). Wir betrachten das hyperbolische Dreieck AA_1C. Der Punkt B ist der Mittelpunkt der Seite AA_1; die Seiten AC und A_1C haben gleiche Längen. Aus der Dreiecksungleichung haben wir

$$\rho(B, A) = \frac{1}{2}\,\rho(A, A_1) < \frac{1}{2}\big(\rho(A, C) + \rho(A_1, C)\big) = \rho(A, C).$$

Deswegen ist $w' = B$.



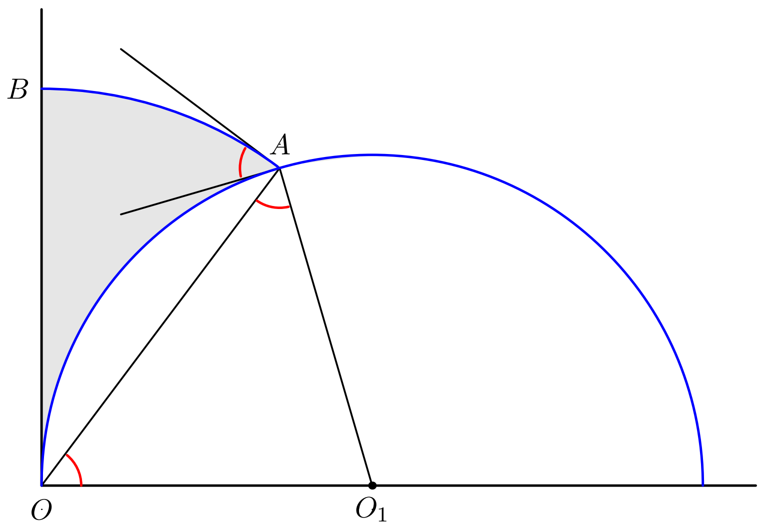
(b) Wir haben $w = 3+4i$ und nach (a) haben wir $w' = 5i$. Dann gilt

$$\rho(w,\ell) = \rho(w,w') = \ln \frac{|w'-\bar{w}| + |w'-w|}{|w'-\bar{w}| - |w'-w|} = \ln \frac{|5i-(3-4i)| + |5i-(3+4i)|}{|5i-(3-4i)| - |5i-(3+4i)|} = \ln 2.$$

(c) Wir parametrisieren dieses Segment so: $\gamma(t) = x(t) + y(t)i = 3t + 4i$, $t \in [0,1]$.

$$h(\gamma) := \int_0^1 \frac{\sqrt{\big(x'(t)\big)^2 + \big(y'(t)\big)^2}}{y(t)}\, dt = \int_0^1 \frac{\sqrt{3^2+0^2}}{4}\, dt = \frac{3}{4}.$$

(d) Der Flächeninhalt F des hyperbolischen Dreiecks OAB ist $\left(\frac{\pi}{2} - \arccos\frac{3}{5}\right)$.



In der Tat: $F = \pi - \widehat{B} - \widehat{O} - \widehat{A} = \pi - \frac{\pi}{2} - 0 - \widehat{A} = \frac{\pi}{2} - \widehat{A}$.
Der Winkel $\widehat{A}$ ist der Winkel zwischen den Tangenten im A zu Bögen AO und AB. Dann ist $\widehat{A}$ gleich dem Winkel zwischen den entsprechenden Radii[1] O_1A und OA . Das euklidsche Dreieck OAO_1 ist gleichschenklig, deswegen gilt

$$\widehat{A} = \angle OAO_1 = \angle AOO_1.$$

Deswegen ist $\cos\widehat{A} = \frac{3}{5}$.

Aufgabe 2. Seien Δ_1 und Δ_2 zwei hyperbolische Dreiecke in $\mathbb{H}$ mit Eckpunkten auf $\mathbb{R}\cup\{\infty\}$. Beweisen Sie, dass es eine Isometrie von $\mathbb{H}$ gibt, die Δ_1 nach Δ_2 abbildet. [5 P.]

Lösung. Sei ℓ die Geodäte, die durch 0 und ∞ läuft. Sei Δ ein Dreieck in $\mathbb{H}$ mit Eckpunkten auf $\mathbb{R}\cup\{\infty\}$. Nach der Anwendung einer passenden Transformation kann man annehmen, dass eine Seite von Δ gleich ℓ ist. Dann läuft eine andere Seite von Δ parallel zu ℓ. Mit Hilfe einer Möbiustransformation der Form $z \mapsto kz$, $k > 0$, kann man erreichen, dass die dritte Seite von Δ durch -1 und 0 läuft. So sind Δ_1 und Δ_2 diesem Δ isometrisch.

[1]Hier ist O_1 das Zentrum des Kreises, den die Geodäte OA enthält.

Aufgabe 3. Seien

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Es ist bekannt, dass der Kern des natürlichen Epimorphismus $\varphi : \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) \to \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}_2)$ gleich $\langle A^2, B^2 \rangle$ ist und dass $|\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}_2)| = 6$ ist. Sei $G := \langle A^2, B^2, C \rangle$.

(a) Berechnen Sie den Index von G in $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$. [5P.]

(b) Malen Sie einen Fundamentalbereich für G in $\mathbb{H}$. Geben Sie eine Begründung. [5P.]

(c) Ist der Fundamentalbereich ein Dirichlet-Bereich? [5P.]

Lösung. (a) Für $H \leqslant G$ benutzen wir die allgemeine Bezeichnung $|G : H|$ für den Index von H in G. Wegen $\ker(\varphi) = \langle A^2, B^2 \rangle$ gilt $\varphi(G) = \varphi(\langle A^2, B^2, C \rangle) = \langle \varphi(C) \rangle$. Die Ordnung von $\varphi(C)$ ist gleich 3. Dann gilt

$$|\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) : G| = |\varphi(\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})) : \varphi(G)| = |\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}_2) : \langle \varphi(C) \rangle| = 6/3 = 2.$$

(b) Sei

$$T = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

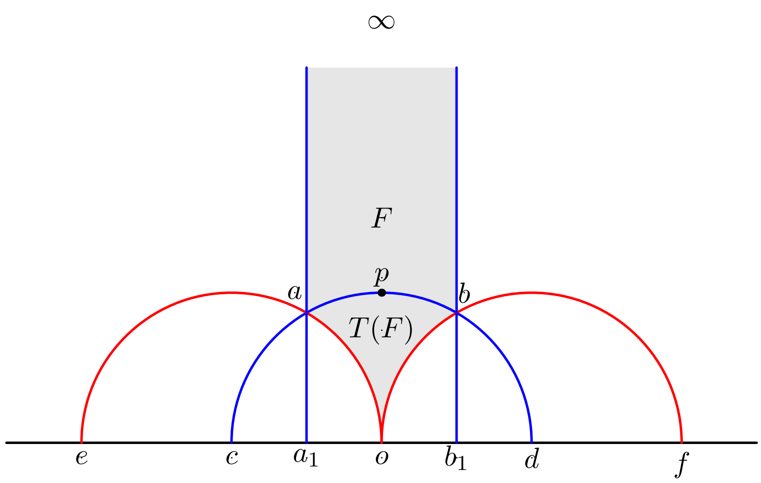
Es ist klar, dass $T \notin G$ ist, weil $\varphi(T) \notin \varphi(G)$ ist. Deswegen ist T ein Repräsentant der zweiten Nebenklasse von G in $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$, und wir haben

$$\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) = G \cup GT.$$

Sei F der Fundamentalbereich für $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ aus dem Satz 3.2.7. Nach Satz 3.1.4 ist

$$\widetilde{F} := F \cup T(F)$$

ein Fundamentalbereich für G.



Hier ist $o = 0$, $p = i$, $a_1 = -\frac{1}{2}$, $a = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $b_1 = \frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $c = -1$, $d = 1$, $e = -2$, $f = 2$.

Nun werden wir zeigen, dass $\widetilde{F}$ ein Dirichlet-Bereich für G ist. Sei θ die Drehung um a um 120° im Uhrzeigersinn. Da $|\theta| = 3$ und der Index von G in $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ gleich 2 ist, ist $\theta \in G$. Merken wir folgendes an:

- Der Punkt $\theta(p)$ liegt auf dem Strahl $[a, a_1)$.
- Da $\theta(a) = a$ ist, ist $\rho(a, p) = \rho(a, \theta(p))$.
- Die Geodäte (eao) ist die Winkelhalbiernde zwischen den Geodäten (a, p) und (a, a_1).

Mit unseren Bezeichnungen aus der Definition 3.2.1 gilt also $L_p(\theta) = (eao)$. Es gilt auch $L_p(\theta^{-1}) = (a_1 a \infty)$. Analog gelten $L_p(\psi) = (obf)$ und $L_p(\psi^{-1}) = (b_1 b \infty)$ für ein $\psi \in G$ (und zwar ψ ist die Drehung um b um 120° im Gegenuhrzeigersinn).

Nach Definition 3.2.1 ist

$$D_p(G) = \bigcap_{g \in G \setminus \{1\}} H_p(g).$$

Außerdem liegt p in $D_p(G)$. Deswegen liegt der Dirichlet-Bereich $D_p(G)$ innerhalb des grauen Bereichs $\widetilde{F}$. Wenn ein Fundamentalbereich in einem anderen liegt, dann sind sie gleich. Deswegen gilt $D_p(G) = \widetilde{F}$.

Aufgabe 4. Seien $G_1 = \langle g_1 \rangle$ und $G_2 = \langle g_2 \rangle$ zwei Untergruppen von $(\text{Möb}_{\mathbb{R}})_{|\mathbb{H}}$ mit

$$g_1(z) = z + 2\pi, \quad g_2(z) = z/(z+1).$$

Wir betrachten zwei Regionen:

$$\begin{aligned} D_1 &= \{z \in \mathbb{H} \mid -\pi < \mathrm{Re}(z) < \pi\}, \\ D_2 &= \{z \in \mathbb{H} \mid |z+1| > 1\} \cap \{z \in \mathbb{H} \mid |z-1| > 1\}. \end{aligned}$$

Merken wir an, dass $D_1 \cup D_2 = \mathbb{H}$ ist. Sei $D = D_1 \cap D_2$ und sei $G = \langle G_1, G_2 \rangle$.

Beweisen Sie:

(a) Es gilt $g(D_1) \cap D_1 = \emptyset$ für alle $g \in G_1 \setminus \{1\}$. [5 P.]

Es gilt $g(D_2) \cap D_2 = \emptyset$ für alle $g \in G_2 \setminus \{1\}$. [5 P.]

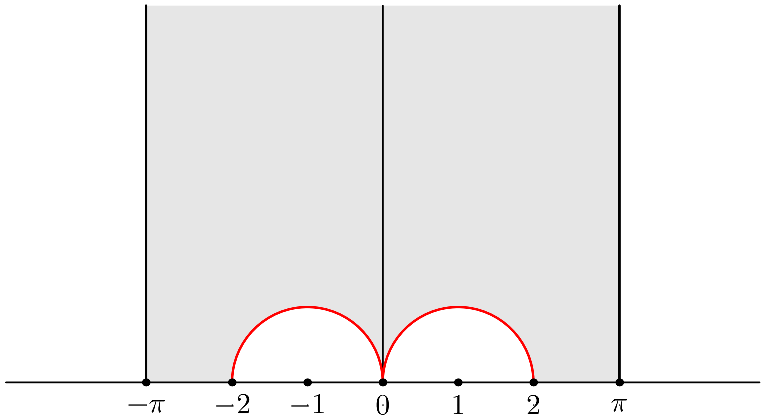
(b) Sei $g = a_n \circ b_n \circ \cdots \circ a_1 \circ b_1$ ein Element in G mit $a_i \in G_1 \setminus \{1\}$, $b_i \in G_2 \setminus \{1\}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Beweisen Sie per Induktion, dass $g(D_2) \subseteq \mathbb{H} \setminus D_1$ ist. [5 P.]

(c) Analog zu (b) kann man beweisen, dass jedes alternierende Produkt nichttrivialer Elemente von G_1 und G_2 den Bereich D auf $\mathbb{H} \setminus D$ abbildet.[2] Leiten Sie daraus ab, dass G diskret ist. [5 P.]

(d) Finden Sie eine unendliche Menge hyperbolischer Elemente in G, die paarweise verschiedene Achsen haben. Beweisen Sie, dass G keine elliptischen Elemente enthält. [5 P.]

(e) Geben Sie zwei hyperbolische Elemente an, die G erzeugen. [5 P.]

[2]Daraus folgt, dass $g \neq 1$ für $n \geqslant 1$ ist. Mit anderen Worten ist G eine freie Gruppe mit der Basis $\{g_1, g_2\}$.



Lösung.

(a) Die erste Formel ist offensichtlich. Die zweite Formel werden wir aus dem folgenden Lemma ableiten.

> **Lemma.** Sei g ein parabolisches Element und sei ℓ eine beliebige Geodäte, die durch den Fixpunkt von g läuft. Dann ist der Abschluss der Region zwischen ℓ und $g(\ell)$ ein Fundamentalbereich für $\langle g \rangle$.
>
> *Beweis.* Jedes parabolische Element ist dem Element $(z \mapsto z+1)$ konjugiert. Für dieses Element ist das Lemma offensichtlich.

Speziell in unserem Fall ist g_2 parabolisch, der Fixpunkt von g_2 ist 0, die Geodäte

$$\ell = \{z \in \mathbb{H} \,|\, |z+1| = 1\}$$

läuft durch den Fixpunkt, und es gilt

$$g_2(\ell) = \{z \in \mathbb{H} \,|\, |z-1| = 1\}.$$

Dann ist $\overline{D}_2$ der Fundamentalbereich für $\langle g_2 \rangle$. Daraus folgt die zweite Formel in (a).

(b) $\underline{n=1}$: $a_1 b_1(D_2) \subseteq a_1(\mathbb{H} \setminus D_2) \subseteq a_1(D_1) \subseteq \mathbb{H} \setminus D_1$.

$\underline{n \to n+1}$: $a_{n+1}b_{n+1}(a_n b_n \dots a_1 b_1)(D_2) \subseteq a_{n+1}b_{n+1}(\mathbb{H} \setminus D_1) \subseteq a_{n+1}b_{n+1}(D_2) \subseteq \mathbb{H} \setminus D_1$.

(c) Aus der ersten Aussage in (c) folgt, dass für $g \neq 1$ gilt:

$$g(D) \cap D = \emptyset.$$

Merken wir an, dass D offen ist.
Angenommen, das G nicht diskret ist. Dann existiert in G eine Folge $(g_n)_{n \geqslant 1}$ verschiedener und nichttrivialer Elementen, die gegen id konvergiert. Für einen Punkt $P \in D$ konvergiert dann $(g_n(P))_{n \geqslant 1}$ gegen P. Das widerspricht der oberen Aussage.

(d) $g_1 g_2^k$ sind hyperbolisch für alle $k \geqslant 1$, weil die Spuren der entsprechenden Matrizen

$$\begin{pmatrix} 1+2\pi k & 2\pi \\ k & 1 \end{pmatrix}$$

größer als 2 sind. Man kann überprüfen, dass diese Elemente paarweise verschiedene Fixpunkte haben. Also haben sie paarweise verschiedene Achsen.

(e) Die hyperbolischen Elemente $g_1 g_2$ und $g_1 g_2^2$ erzeugen G.