Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Oleg Bogopolski

WiSe 2014/15
Abgabe am 20.01.2015
vor der Übung

Fuchssche Gruppen
Übungsblatt 6

Aufgabe 1.

(1) Wählen Sie die Fundamentalbereiche F_i für die folgenden Fuchsschen Gruppen G_i, skizzieren Sie diese und berechnen Sie $\mu(F_i)$, $i = 1, 2$.

(a) $G_1 = \langle T_1 \rangle$ mit $T_1(z) = z + 1$, $z \in \mathbb{H}$. [3 P.]

(b) $G_2 = \langle T_2 \rangle$ mit $T_2(z) = -\dfrac{1}{z+1}$, $z \in \mathbb{H}$. [4 P.]

(2) Beweisen Sie, dass $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) \cong \langle T_1, T_2 \rangle$ ist. [4 P.]

Hinweis zu (1)(b). $\mathrm{Ord}(T_2) = 3$.

Aufgabe 2. Beweisen Sie, dass nichtdiskrete Untergruppen von $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ keinen Fundamentalbereich haben. [4 P.]

Aufgabe 3. Beweisen Sie das Lemma 2.8.4 aus dem Skript:

(1) Wenn $T \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ die Ordnung 2 hat, dann ist $\mathrm{Tr}(T) = 0$. [3 P.]

(2) Elliptische Elemente in unendlichen elementaren diskreten Gruppen haben die Ordnung 2. [3 P.]

Hinweis zu (2). Satz 2.7.5.

Aufgabe 4. Sei $T \in (\text{Möb}_{\mathbb{R}})_{|\mathbb{H}}$. Beweisen Sie:

(1) Wenn T hyperbolisch oder parabolisch ist, dann ist die Differenz $\widehat{\mathbb{H}} \setminus \widehat{\mathrm{Fix}}(T)$ Vereinigung von unendlichen T-Orbits. Insbesondere ist $\widehat{\mathrm{Fix}}(T)$ die maximale endliche T-invariante Menge in $\widehat{\mathbb{H}}$. [3 P.]

(2) Wenn T elliptisch ist, dann gilt:

(a) Wenn $\langle T \rangle$ diskret ist mit $n = \mathrm{Ord}(T)$, dann ist die Differenz $\widehat{\mathbb{H}} \setminus \widehat{\mathrm{Fix}}(T)$ Vereinigung von n-elementigen T-Orbits. [2 P.]

(b) Wenn $\langle T \rangle$ nicht diskret ist, dann ist die Differenz $\widehat{\mathbb{H}} \setminus \widehat{\mathrm{Fix}}(T)$ Vereinigung von unendlichen T-Orbits. [2 P.]

Aufgabe 5. Sei $p = 2i$ und sei $G := \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$. Es ist bekannt, dass

$$D_p(G) = \left\{ z \in \mathbb{H} \,\middle|\, |z| \geqslant 1, |\mathrm{Re}(z)| \leqslant \frac{1}{2} \right\}$$

ist. Ein Punkt $z \in \mathbb{H}$ heißt *elliptisch* für G, falls ein elliptisches Element $g \in G \setminus \{1\}$ mit $g(z) = z$ existiert.

Beweisen Sie, dass i, $\rho := -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$ und $\rho + 1$ die einzigen elliptischen Punkte der Gruppe G im Fundamentalbereich $D_p(G)$ sind. [8 P.]

Keine weiteren Aufgaben.