Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Oleg Bogopolski

WiSe 2014/15
Abgabe am 9.12.2014
vor der Übung.

Fuchssche Gruppen
Übungsblatt 4

Aufgabe 1. Beweisen Sie:

(a) Die Limesmenge jeder Fuchsschen Gruppe ist abgeschlossen in $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$. [4 P.]

(b) Die Limesmenge der Fuchsschen Gruppe $G = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ ist gleich $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$. [6 P.]

Hinweis zu (b): Zuerst beweisen Sie, dass ∞ in $\Lambda(G)$ liegt. Dannach beweisen Sie, dass jede rationale Zahl $\frac{p}{q}$ in $\Lambda(G)$ liegt (siehe Lemma 2.5.7 (2)). Schließlich benutzen Sie (a).

Aufgabe 2.

(a) Beweisen Sie Folgerung 2.5.8 aus dem Kurzskript: [4 P.]

Für jede Fuchssche Gruppe G hat die Menge der Fixpunkte ihrer elliptischen Elemente keinen Häufungspunkt in $\mathbb{H}$. Mit anderen Worten hat die Menge

$$\{z \in \mathbb{H} \,|\, g(z) = z \text{ für einen nichttrivialen } g \in G\}$$

keinen Häufungspunkt in $\mathbb{H}$.

(b) Beweisen Sie, dass alle elliptischen Elemente in $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ die Ordnungen 2 oder 3 haben. [5 P.]

Aufgabe 3. Seien $A, B \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ zwei hyperbolische Elemente, die nur einen gemeinsamen Fixpunkt α haben. Beweisen Sie, dass ihr Kommutator $[A, B] := A^{-1}B^{-1}AB$ ein parabolisches Element mit dem Fixpunkt α ist. [5 P.]

Aufgabe 4. Beweisen Sie, dass jede diskrete Untergruppe G von $\mathbb{R}^n$ endlich erzeugt ist[1]. [5 P.]

Hinweis. Wir betrachten den Untervektorraum

$$U_G := \{r_1 g_1 + \cdots + r_s g_s \,|\, s \in \mathbb{N}, r_i \in \mathbb{R}, g_i \in G, i = 1, \ldots, s\}.$$

Sei $v_1, \ldots, v_m \in G$ seine $\mathbb{R}$-Basis. (Warum existiert eine solche Basis?) Wir betrachten die Untergruppe $H := \mathbb{Z}v_1 + \cdots + \mathbb{Z}v_m$ von G. Beweisen Sie, dass die Gruppe G/H endlich ist. Wie folgt daraus, dass G endlich erzeugt ist?

Aufgabe 5. (schwer!) Wir definieren etwas feinere als klassische Topologie auf $\mathbb{R}$, indem wir sagen, dass die Basis der neuen Topologie aus den Mengen der Form $[a, b)$ $(a < b)$ besteht. [5 P.] Beweisen Sie, dass der resultierte topologische Raum $\widehat{R}$ nicht metrisierbar ist[2].

[1] Nach der Klassifikation endlich erzeugter abelscher Gruppen wird dann folgen, dass $G \cong \underbrace{\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}}_{k \text{ Mal}}$ für ein $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ist.

[2] Schauen Sie in Wikipedia nach, was ein metrisierbarer Raum ist.