Musterlösung

Aufgabe 1 *(4 Punkte)*

Entscheiden Sie, welche der folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

		wahr	falsch
(a)	Eine Teilmenge A eines metrischen Raumes ist genau dann kompakt, wenn A beschränkt und abgeschlossen ist.	☐	■
(b)	Seien $n \in \mathbb{N}$ und $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Dann gilt $e^{A+B} = e^A e^B$.	☐	■
(c)	Die Menge $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > y\}$ ist offen in $\mathbb{R}^2$.	■	☐
(d)	Sei $n \in \mathbb{N}$. Für jedes $p > 1$ ist $\|\|x\|\|_p = (\|x_1\|^p + \ldots + \|x_n\|^p)^{\frac{1}{p}}$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n$	■	☐

Je ein Punkt pro richtiger Antwort.

Aufgabe 2 *(9 Punkte)*

Wir definieren $f : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ durch

$$f(x) = \begin{pmatrix} e^{4x}\cos(x) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}e^{4x} \\ e^{4x}\sin(x) \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Weglänge von f.
Lösung:
Da f stetig differenzierbar ist, gilt

$$L(f) = \int_0^1 ||f'(t)||_2 dt.$$

Wir berechnen daher

$$f'(x) = \begin{pmatrix} 4e^{4x}\cos(x) - e^{4x}\sin(x) \\ 4\frac{1}{\sqrt{2}}e^{4x} \\ 4e^{4x}\sin(x) + e^{4x}\cos(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4e^{4x}\cos(x) - e^{4x}\sin(x) \\ 2\sqrt{2}e^{4x} \\ 4e^{4x}\sin(x) + e^{4x}\cos(x) \end{pmatrix}$$

sowie

$$\begin{aligned} ||f'(x)||_2 &= \sqrt{(4e^{4x}\cos(x) - e^{4x}\sin(x))^2 + 8e^{8x} + (4e^{4x}\sin(x) + e^{4x}\cos(x))^2} \\ &= \sqrt{16e^{8x}\cos^2(x) + e^{8x}\sin^2(x) + 8e^{8x} + 16e^{8x}\sin^2(x) + e^{8x}\cos^2(x)} \\ &= \sqrt{16e^{8x} + e^{8x} + 8e^{8x}} \\ &= e^{4x}\sqrt{25} \\ &= 5e^{4x}. \end{aligned}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} L(f) &= \int_0^1 ||f'(t)||_2 dt \\ &= \int_0^1 5e^{4x} dt \\ &= 5\left[\frac{1}{4}e^{4x}\right]_0^1 \\ &= \frac{5}{4}(e^4 - 1). \end{aligned}$$

Aufgabe 3 *(6+8 Punkte)*

Wir definieren $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch $f(x,y) = \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}y^2 + xy + 4$.

(a) Bestimmen Sie kritische Stellen und lokale Maxima und Minima von f, wenn sie existieren.

(b) Bestimmen Sie das Maximum und das Minimum von f auf dem Dreieck

$$\triangle = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq 2,\ x+y \leq 2\}.$$

Lösung:

(a) Zur Bestimmung der kritischen Stellen berechnen wir die Nullstellen des Gradienten

$$\begin{aligned} gradf(x,y) &= (2x^2 + y, y + x) \overset{!}{=} (0,0) \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} 2x^2 &= -y \\ y &= -x \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} 2x^2 &= x \\ y &= -x \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} x &= 0 \text{ oder } 2x = 1 \\ y &= -x \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} x &= 0 \text{ oder } x = \frac{1}{2} \\ y &= -x \end{cases}. \end{aligned}$$

Wir erhalten somit die kritischen Stellen $(x_1, y_1) = (0,0)$ und $(x_2, y_2) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$. Um zu überprüfen, ob es sich bei den gefunden Stellen um lokale Extrema handelt, berechnen wir die Hesse-Matrix

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 4x & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

für jedes $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Dann gilt

$$H_f(x_1,y_1) = H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Da

$$det(H_f(x_1,y_1)) = \Delta_2 = 0 - 1 < 0$$

folgt mit dem Kriterium von Hurwitz, dass die Matrix indefinit ist und somit in diesem Punkt kein lokales Extremum vorliegt. Im zweiten kritischen Punkt gilt

$$H_f(x_2,y_2) = H_f\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Da

$$det(H_f(x_2,y_2)) = \Delta_2 = 2 - 1 = 1 > 0$$

und $\Delta_1 = 2 > 0$ liegt nach dem Kriterium von Hurwitz in diesem Punkt ein lokales Minimum vor.

(b) Wir suchen nun das Maximum/Minimum der Funktion auf dem Dreieck $\triangle$. Wir stellen zunächst fest, dass das in Teil a) gefundene lokale Minimum nicht in der Menge enthalten ist. Da das Dreieck allerdings eine kompakte Menge ist (beschränkt und abgeschlossen), muss ein Maximum/Minimum angenommen werden und somit genügt es, den Rand darauf zu untersuchen. Dazu betrachten wir die folgenden Fälle:

1. Fall: $x = 0,\ y \in [0, 2]$. Wir betrachten die Funktion $f_1 : [0, 2] \to \mathbb{R}$ mit $f_1(y) = f(0, y) = \frac{1}{2}y^2 + 4$. Wegen $f_1'(y) = y \geq 0$ für jedes $y \in [0, 2]$ ist die Funktion monoton steigend und daher gilt

$$\max_{y\in[0,2]} f_1(y) = f_1(2) = 6$$
$$\min_{y\in[0,2]} f_1(y) = f_1(0) = 4.$$

2. Fall: $y = 0,\ x \in [0, 2]$. Wir betrachten die Funktion $f_2 : [0, 2] \to \mathbb{R}$ mit $f_2(x) = f(x, 0) = \frac{2}{3}x^3 + 4$. Wegen

$$f_2'(x) = 2x^2 \geq 0 \quad \forall x \in [0, 2]$$

ist die Funktion monoton steigend und daher gilt

$$\max_{x\in[0,2]} f_2(x) = f_2(2) = \frac{16}{3} + 4 = \frac{28}{3}$$
$$\min_{x\in[0,2]} f_2(x) = f_2(0) = 4.$$

3. Fall: $x \in [0, 2]$ und $y = 2 - x$. Wir betrachten die Funktion $f_3 : [0, 2] \to \mathbb{R}$ mit

$$\begin{aligned} f_3(x) = f(x, 2-x) &= \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}(2-x)^2 + (2-x)x + 4 \\ &= \frac{2}{3}x^3 + 2 - 2x + \frac{1}{2}x^2 + 2x - x^2 + 4 \\ &= \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 6 \end{aligned}$$

Wegen

$$\begin{aligned} & f_3'(x) = 2x^2 - x \stackrel{!}{=} 0 \\ \Leftrightarrow \quad & x = 0 \text{ oder } x = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

hat f_3 die kritischen Stellen $x = 0$ und $x = \frac{1}{2}$. Mit $f_3''(x) = 4x - 1$ gilt

$$f_3''(0) = -1 < 0$$
$$f_3''\left(\frac{1}{2}\right) = 2 - 1 = 1 > 0$$

und somit liegt im Punkt $x = 0$ ein lokales Maximum, im Punkt $x = \frac{1}{2}$ ein lokales Minimum vor. Wegen $f_3(2) = \frac{28}{3} > 6 = f_3(0)$, nimmt f_3 das globale Maximum aber am rechten Rand an. Somit gilt

$$\max_{x\in[0,2]} f_3(x) = f_3(2) = \frac{16}{3} + 4 = \frac{28}{3}$$
$$\min_{x\in[0,2]} f_3(x) = f_3\left(\frac{1}{2}\right) = 6 - \frac{1}{24}.$$

Damit gilt insgesamt:

$$\max_{(x,y)\in\triangle} f(x,y) = \max_{i=1\ldots 3}\max_{x\in[0,2]} f_i(x) = \frac{28}{3}$$

sowie

$$\min_{(x,y)\in\triangle} f(x,y) = \min_{i=1\ldots 3}\min_{x\in[0,2]} f_i(x) = 4.$$

Aufgabe 4 *(4+7 Punkte)*

Es werden nur *reelle* Lösungen $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der folgenden Differentialgleichungen gesucht.
(a) Geben Sie ein Fundamentalsystem der folgenden Differentialgleichung an:

$$y'' - 4y' + 3y = 0.$$

(b) Geben Sie die Lösungsmenge der folgenden Differentialgleichung an:

$$y'' - 4y' + 3y - 10\cos(x) = 0.$$

Hinweis: Eine spezielle Lösung ist eine Kombination der trigonometrischen Funktionen $\sin(x)$ *und* $\cos(x)$*.*

Lösung:

(a) Nach Satz 13.30 ist das charakteristische Polynom dieser Differentialgleichung gegeben durch

$$\xi(x) = x^2 - 4x + 3.$$

Wegen

$$x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4-3} = 2 \pm 1$$

ist nach Satz 13.30 ein Fundamentalsystem gegeben durch

$$\phi^1(x) = e^x, \quad \phi^2(x) = e^{3x}.$$

(b) Wir haben in Teil (a) bereits die Lösungen der zugehörigen homogenen Differentialgleichung bestimmt. Daher genügt es, eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung zu finden. Dazu machen wir den Ansatz

$$\psi(x) = a\cos(x) + b\sin(x)$$

(Vergleiche Bemerkung 13.31). Dann gilt

$$\psi'(x) = -a\sin(x) + b\cos(x)$$

$$\psi''(x) = -a\cos(x) - b\sin(x)$$

sowie

$$\begin{aligned}\psi''(x) - 4\psi'(x) + 3\psi(x) &= \cos(x)(-a - 4b + 3a) + \sin(x)(-b + 4a + 3b)\\ &= \cos(x)(2a - 4b) + \sin(x)(4a + 2b)\end{aligned}$$

Erfüllt nun ψ die inhomogene Differentialgleichung, so gilt

$$\begin{aligned}\psi''(x) - 4\psi'(x) + 3\psi(x) &= \cos(x)(2a - 4b) + \sin(x)(4a + 2b)\\ &\overset{!}{=} 10\cos(x)\end{aligned}$$

und durch Koeffizientenvergleich erhalten wir

$$\begin{cases} 2a - 4b & = 10 \\ 4a + 2b & = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a - 4b & = 10 \\ b & = -2a \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 10a & = 10 \\ b & = -2a \end{cases}$$

also $a = 1$ und $b = -2$. Also ist $\psi(x) = \cos(x) - 2\sin(x)$ eine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung. Alle Lösungen sind daher von der Form

$$\begin{aligned}y(x) &= C_1\phi^1(x) + C_2\phi^2(x) + \psi(x)\\ &= C_1 e^x + C_2 e^{3x} + \cos(x) - 2\sin(x)\end{aligned}$$

für Konstanten $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 5 *(12 Punkte)*

Geben Sie ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung an:

$$y' = Ay \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Lösung:
Wir lösen zunächst für die erste Komponente

$$y_1'(x) = 2y_1(x).$$

Dann sind alle Lösungen von der Form $y_1(x) = Ce^{2x}$ für eine Konstante $C > 0$. Dann gilt für die zweite Komponente

$$y_2'(x) = -4y_1(x) + 4y_2(x) = 4y_2(x) - 4Ce^{2x}.$$

Wir verwenden Satz 11.17 für die Lösung dieser linearen Differentialgleichung. Definiere dafür $a, b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $a(x) = 4$, $b(x) = -4Ce^{2x}$. Dann sind a und b stetig. Finden wir eine Lösung der Differentialgleichung, so gilt $y_2(0) = y_0$ für ein $y_0 \in \mathbb{R}$. Wir können daher o.B.d.A. $x_0 = 0$ wählen. Wir berechnen

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \exp\left(\int_0^x a(t)dt\right) \\ &= \exp\left(\int_0^x 4dt\right) \\ &= e^{4x} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \phi(x)\left(y_0 + \int_0^x \frac{b(t)}{\phi(t)}dt\right) \\ &= e^{4x}\left(y_0 - 4C\int_0^x e^{2t}e^{-4t}dt\right) \\ &= e^{4x}\left(y_0 - 4C\int_0^x e^{-2t}dt\right) \\ &= e^{4x}\left(y_0 - 4C\left[-\frac{1}{2}e^{-2t}\right]_0^x\right) \\ &= e^{4x}\left(y_0 + 2Ce^{-2x} - 2C\right) \\ &= y_0e^{4x} + 2Ce^{2x} - 2Ce^{4x}. \end{aligned}$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} Ce^{2x} \\ y_0e^{4x} + 2Ce^{2x} - 2Ce^{4x} \end{pmatrix} \\ &= C\begin{pmatrix} e^{2x} \\ 2e^{2x} \end{pmatrix} + (y_0 - 2C)\begin{pmatrix} 0 \\ e^{4x} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und ein Fundamentalsystem ist gegeben durch die Funktionen

$$\phi^1(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{2x}, \quad \phi^2(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{4x}.$$

Alternative Lösung 1: Wir berechnen das charakteristische Polynom der Matrix A:

$$\xi_A(x) = det(x \cdot Id - A) = det\begin{pmatrix} x-2 & 0 \\ 4 & x-4 \end{pmatrix}$$
$$= (x-2)(x-4).$$

Wir erhalten daher die Eigenwerte $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = 4$ jeweils mit algebraischer und geometrischer Vielfachheit 1. Nach Satz 13.24 sind alle Lösungen von der Form

$$y(x) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} e^{2x} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} e^{4x}$$

für Konstanten $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$. Zur Bestimmung der Konstanten setzen wir in die Differentialgleichung ein:

$$\begin{aligned} y'(x) &= \begin{pmatrix} 2a_1 \\ 2a_2 \end{pmatrix} e^{2x} + \begin{pmatrix} 4b_1 \\ 4b_2 \end{pmatrix} e^{4x} \\ &\overset{!}{=} Ay(x) \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 e^{2x} + b_1 e^{4x} \\ a_2 e^{2x} + b_2 e^{4x} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2a_1 e^{2x} + 2b_1 e^{4x} \\ -4a_1 e^{2x} - 4b_1 e^{4x} + 4a_2 e^{2x} + 4b_2 e^{4x} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Durch Koeffizientenvergleich erhalten wir $b_1 = 0$ sowie $4a_1 = 2a_2$. Dann ist

$$y(x) = a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{2x} + b_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{4x}$$

und die Funktionen

$$\phi^1(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{2x}, \quad \phi^2(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{4x}$$

bilden ein Fundamentalsystem.

Alternative Lösung 2: Wie oben bestimmt man die Eigenwerte von A als $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = 4$. Da beide Eigenwerte algebraische und geometrische Vielfachheit 1 haben, ist die zugehörige Jordan-Matrix gegeben durch

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt nach Beispiel 13.8.

$$e^{xJ} = \begin{pmatrix} e^{2x} & 0 \\ 0 & e^{4x} \end{pmatrix}.$$

Die Transformationsmatrix T besteht aus den Eigenvektoren. Wegen

$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

ist $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert 2 und mit

$$A \cdot \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

ist $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert 4. Also

$$T = \begin{pmatrix}1 & 0\\2 & 1\end{pmatrix}$$

und somit

$$T^{-1} = \frac{1}{1-0}\begin{pmatrix}1 & 0\\-2 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\-2 & 1\end{pmatrix}.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} e^{xA} &= Te^{xJ}T^{-1} = \begin{pmatrix}1 & 0\\2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{2x} & 0\\0 & e^{4x}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\-2 & 1\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}1 & 0\\2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{2x} & 0\\-2e^{4x} & e^{4x}\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}e^{2x} & 0\\2e^{2x}-2e^{4x} & e^{4x}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

und in den Spalten dieser Matrix steht ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung.
Bemerkung: Man muss T^{-1} nicht zwingend berechnen. Die Spalten von Te^{xJ} bilden ebenso ein Fundamentalsystem.

Aufgabe 6 *(2+8 Punkte)*

(a) Formulieren Sie den Mittelwertsatz.

(b) Sei $f : (0,\infty) \times (0,\infty) \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(x_1 x_2) \\ \cos(x_2) \end{pmatrix}.$$

Sei $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $z = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Finden Sie eine Konstante $M > 0$, so dass

$$||f(x+sz) - f(x)||_\infty \leqslant Ms$$

für alle $s \in [0,1]$ gilt.

Lösung:

(a) Mittelwertsatz (siehe Theorem 8.3 im Skript)

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f\colon U \to \mathbb{R}^m$ von der Klasse C^1. Seien $x, \xi \in \mathbb{R}^n$, so dass die Strecke $A = \{x + t\xi \mid 0 \leqslant t \leqslant 1\}$ ganz in U liegt. Wähle $M > 0$, so dass $||(Df)(y) \cdot v|| \leqslant M \cdot ||v||$ für alle $y \in A$ und $v \in \mathbb{R}^n$ gilt. Dann gilt $||f(x+\xi) - f(x)|| \leqslant M \cdot ||\xi||$.

(b) Fixiere $s \in [0,1]$ und setze $\xi = sz$ sowie A wie oben. Dann gilt

$$||f(x+sz) - f(x)||_\infty \leqslant M \cdot ||sz||_\infty = M \cdot |s| \cdot ||z||_\infty = M \cdot |s|$$

für M wie im Mittelwertsatz. Für $y \in A$ und $v \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ mit $||v||_\infty = 1$ gilt

$$\begin{aligned} ||(Df)(y) \cdot v||_\infty &= \left\| \begin{pmatrix} y_2 \cos(y_1 y_2) & y_1 \cos(y_1 y_2) \\ 0 & -\sin(y_2) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \right\|_\infty \\ &= \max_{y \in A} \Big\{ |y_2 \cos(y_1 y_2) \cdot v_1 + y_1 \cos(y_1 y_2) \cdot v_2|,\ |\sin(y_2) \cdot v_2| \Big\} \\ &\leqslant \max_{y \in A} \Big\{ |y_2 \cos(y_1 y_2)| + |y_1 \cos(y_1 y_2)|,\ |\sin(y_2)| \Big\} \\ &\leqslant \max_{y \in A} \Big\{ |y_2| + |y_1|,\ 1 \Big\} \quad \leqslant \quad 3. \end{aligned}$$

Also gilt die gewünschte Ungleichung für $M = 3$.