Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Oleg Bogopolski
Svenja Lage

SoSe 2019
Abgabe Di., 4.06, 10:20 Uhr

Analysis II
Übungsblatt 9

Aufgabe 1.

(a) Gegeben sei die Differentialgleichung [8P]

$$y' = \frac{1}{2}x \cdot (y + \sqrt{y})$$

im Bereich $\mathcal{U} = \{(x, y)\,|x \in \mathbb{R},\ y \in (0, \infty)\}$. Schreiben Sie genau alle Lösungen der Differentialgleichung mit Anfangswertaufgabe

$$y(x_0) = y_0$$

auf, wobei $(x_0, y_0) \in \mathcal{U}$ beliebig ist.

(b) Skizzieren Sie die Graphen von zwei Lösungen der Differentialgleichung mit den Anfangswertaufgaben $y(0) = 1$ und $y(0) = \frac{1}{4}$ auf dem Intervall $\{x \mid -2 \leqslant x \leqslant 2\}$. [2P]

Aufgabe 2. Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x, y) := \begin{cases} \sqrt{xy}, & \text{falls } xy > 0 \text{ ist,} \\ 0, & \text{falls } xy \leqslant 0 \text{ ist.} \end{cases}$$

Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y' = f(x, y).$$

(a) Skizzieren Sie das Richtungsfeld der Differentialgleichung im Bereich $[-2, 2] \times [-3, 3]$ mit den horizontalen und vertikalen Schritten jeweils 1. [2P]

(b) Bestimmen Sie die Lösungsgesamtheit der Differentialgleichung in den Bereichen

(i) $\mathcal{U}_1 := \{(x, y) \mid x > 0, y > 0\}$. [4P]

(ii) $\mathcal{U}_2 := \{(x, y) \mid x < 0, y < 0\}$. [3P]

(iii) $\mathcal{U}_3 := \{(x, y) \mid x > 0, y < 0\}$. [1P]

(iv) $\mathcal{U}_4 := \{(x, y) \mid x < 0, y > 0\}$. [1P]

(c) Nun betrachten wir diese Differentialgleichung im Bereich $\mathcal{U} := \mathbb{R}^2$. Beschreiben Sie alle (unendlich viele) Lösungen $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dieser Differentialgleichung, die die Bedingung $\varphi(0) = 0$ erfüllen. [2P]

(d) Beweisen Sie, dass die Funktion $f(x, y)$ nicht lokal Lipschitz-stetig im zweiten Argument ist. Gilt der Schluß des Picard-Lindelöf Satzes für diese Differentialgleichung im Bereich $\mathcal{U} := \mathbb{R}^2$ trotzdem? [3P]

Fortsetzung Seite 2.

Aufgabe 3. Bestimmen Sie die Lösungsgesamtheiten der folgenden inhomogenen Differentialgleichungen:

(a)
$$y' - \frac{y}{x} - x^2 e^x = 0$$
im Bereich $\mathcal{U} := (0, \infty) \times \mathbb{R}$. [8P]

(b)
$$y' + y - \sinh(x) = 0$$
im Bereich $\mathcal{U} := \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. [6P]

Hinweis. Nach Definition ist $\sinh(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ für $x \in \mathbb{R}$. Diese Funktion heißt *Sinus hyperbolicus*.