Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Oleg Bogopolski
Svenja Lage

SoSe 2019
Abgabe Di., 14.05, 10:20 Uhr

Definition. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine partiell differenzierbare Funktion. Ein Punkt $u \in U$ heißt *kritische Stelle* von f, wenn $\frac{\partial f}{\partial x_i}(u) = 0$ für $i = 1, \ldots, n$ gilt.

Analysis II
Übungsblatt 6

Aufgabe 1. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch [4+8P]

$$f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \cdot \sin(x_2) \\ e^{2x_1 x_2} \end{pmatrix}.$$

Sei $z = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\zeta = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

(a) Beweisen Sie:

$$||f(z+\zeta) - f(z)||_1 < e^{48}.$$

(b) Finden Sie eine Konstante $M > 0$, so dass

$$||f(z+t\zeta) - f(z)||_\infty \leqslant M|t|$$

für alle $t \in [0, 1]$ gilt.

Hinweis zu (b). Benutzen Sie Beispiel 8.4 des Kurzskripts als Muster.

Aufgabe 2. Wir definieren $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x, y) = x^2 + 2y^2 + 2xy - 6x - 8y + 11.$$

(a) Beweisen Sie, dass f genau eine kritische Stelle (x_0, y_0) besitzt und bestimmen Sie diese. [4P]

(b) Für $X = (x_0, y_0)$ aus (a), für ein beliebiges $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2) \in \mathbb{R}^2$ und für $k = 2$ schreiben Sie alle Summanden in der Taylor-Formel aus dem Theorem 8.7 auf. [5P]

(c) Mit Hilfe der Taylor-Formel drücken Sie $f(x, y)$ durch $f(x_0, y_0)$, $\nabla f(x_0, y_0)$, $H_f(x_0, y_0)$ und $(x - x_0, y - y_0)$ aus. [4P]

(d) Leiten Sie direkt aus (c) ab, dass in (x_0, y_0) ein *globales* Minimum der Funktion f erreicht wird. [5P]

Fortsetzung Seite 2.

Aufgabe 3. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Seien A und B zwei nichtleere Teilmengen von X. Der Abstand zwischen A und B ist definiert durch

$$\operatorname{dist}(A, B) := \inf\{d(x, y) \mid x \in A,\ y \in B\}.$$

(a) Beweisen Sie: Ist A abgeschlossen, B kompakt und $A \cap B = \emptyset$, dann gilt [6P]

$$\operatorname{dist}(A, B) > 0.$$

(b) Geben Sie ein Beispiel von zwei nichtleeren abgeschlossenen Mengen A und B in $\mathbb{R}^2$ mit $A \cap B = \emptyset$ und [4P]

$$\operatorname{dist}(A, B) = 0.$$