Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Oleg Bogopolski
Svenja Lage

SoSe 2019
Abgabe Di, 23.04, 10:20 Uhr

Analysis II
Übungsblatt 3

Aufgabe 1. Sei $(X, ||\cdot||)$ ein normierter Raum. Beweisen Sie, dass die Abbildung $f : X \to \mathbb{R}$, $x \mapsto ||x||$ stetig ist. [6P]

Aufgabe 2. Sei X eine nichtleere Menge. Wir definieren eine Metrik d auf X mit

$$d(x,y) = \begin{cases} 1 & x \neq y, \\ 0 & x = y. \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass X genau dann kompakt ist, wenn X endlich ist. [3P]

(b) Sei X unendlich. Nach (a) ist X nicht kompakt. [3P]
Zeigen Sie, dass X beschränkt und abgeschlossen bezüglich d ist.
Warum ist das kein Widerspruch zum Satz von Heine-Borel?

Aufgabe 3.

(a) Wir wissen, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \exp(x)$ stetig ist. Geben Sie eine kompakte Menge A in $\mathbb{R}$ an, so dass ihr Urbild $f^{-1}(A)$ nicht kompakt ist[1]. [3P]

(b) Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige und bijektive Abbildung. Beweisen Sie: [6P]

(i) g ist streng monoton.

(ii) Für jede kompakte Menge A in $\mathbb{R}$ ist ihr Urbild $g^{-1}(A)$ kompakt.

Hinweis zu (ii). Benutzen Sie (i) und einen Satz aus dem Kurzskript zu Analysis I.

Aufgabe 4. (Arithmetisches und geometrisches Mittel) In Zukunft brauchen wir folgende Ungleichung, die für alle nicht negativen reellen Zahlen $a_1, \dots, a_n$ gilt:

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}. \tag{1}$$

Beweisen Sie diese Ungleichung in zwei Schritten:

(a) Beweisen Sie, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: [5P]

$$\exp(x-1) \geqslant x. \tag{2}$$

(b) Sei $c = \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$. Aus n Ungleichungen (2) für $x = \frac{a_i}{c}$, $i = 1, \dots, n$ leiten Sie die Ungleichung (1) ab. [7P]

Fortsetzung Seite 2.

[1] Vergleiche mit Satz 4.6 des Kurzskripts

Zur Erinnerung:

Korollar 4.9. *Je zwei Normen $||\cdot||$ und $||\cdot||^*$ auf $\mathbb{R}^n$ sind äquivalent.*
Aus dem Beweis des Satzes 4.8 folgt sogar, dass für alle $v \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$||v||^* \leqslant L \cdot ||v||$$

mit

$$L = n \cdot \frac{\max\{||x||^* \ : \ x \in \mathbb{R}^n, ||x||_\infty = 1\}}{\min\{||x|| \ \ : \ x \in \mathbb{R}^n, ||x||_\infty = 1\}}. \qquad (\checkmark)$$

Aufgabe 5. Seien p und q reelle Zahlen mit $p, q \geqslant 1$. Leiten Sie aus dem $(\checkmark)$ ab, dass für die Normen $||\cdot||_p$ und $||\cdot||_q$ auf $\mathbb{R}^n$ und für alle $v \in \mathbb{R}^n$ das folgende gilt: [7P]

$$\frac{1}{n^2} \cdot ||v||_q \leqslant ||v||_p \leqslant n^2 \cdot ||v||_q.$$