Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Oleg Bogopolski
Svenja Lage

SoSe 2019
Abgabe Di, 16.04, 10:20 Uhr

Analysis II
Übungsblatt 2

Aufgabe 1. Sei (X, d) ein metrischer Raum und seien $A, B \subseteq X$.

(1) Zeigen Sie: [8P]

(a) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

(b) $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$

(c) $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$

(d) $(A \cup B)^\circ \supseteq A^\circ \cup B^\circ$.

(2) Erläutern Sie anhand geeigneter Beispiele, dass in den Teilen (c) und (d) die anderen Inklusionen nicht gelten. [4P]

Aufgabe 2. Eine Teilmenge A eines $\mathbb{R}$-Vektorraums V heißt *konvex*, wenn gilt:
Sind $x, y \in A$, so enthält A auch die Verbindungsstrecke $\{\lambda y + (1-\lambda)x \mid 0 \leqslant \lambda \leqslant 1\}$ von x und y.

(a) Beweisen Sie: Ist V ein normierter $\mathbb{R}$-Vektorraum und $r > 0$, so sind die Mengen $B_r(0)$ und $\overline{B}_r(0)$ konvex. [2P]

(b) Für $p > 0$ und $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ definieren wir [6P]

$$||x||_p := (|x_1|^p + \cdots + |x_n|^p)^{1/p}.$$

Beweisen Sie, dass $||\cdot||_p$ keine Norm auf $\mathbb{R}^n$ ist, falls $0 < p < 1$ und $n \geqslant 2$ sind.

Bemerkung. Für jedes $p \geqslant 1$ ist $||\cdot||_p$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n$. Das ist aber nicht leicht zu beweisen.

Fortsetzung Seite 2.

Aufgabe 3. Wir betrachten $\mathbb{R}^n$ mit der euklidischen Norm.

(a) Geben Sie jeweils ein Beispiel der folgenden Mengen M in $\mathbb{R}^{\mathbf{2}}$. [3P]

(i) M ist beschränkt und offen, aber nicht abgeschlossen.

(ii) M ist beschränkt und abgeschlossen, aber nicht offen.

(iii) M ist beschränkt, nicht abgeschlossen und nicht offen.

(b) Beweisen Sie: Eine beschränkte und nichtleere Menge M in $\mathbb{R}^{\mathbf{1}}$ kann nicht gleichzeitig abgeschlossen und offen sein. [7P]

Hinweis zu (b). Denken Sie über $\inf M$ nach.

Aufgabe 4. Beweisen Sie, dass für jedes $a \in \mathbb{R}$ die folgende Funktion $f_a : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ im Ursprung $(0, 0)$ nicht stetig ist: [10P]

$$f_a(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & \text{falls } (x, y) \neq (0, 0), \\ a, & \text{falls } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Hinweis. Testen Sie verschiedene Punkte (x, y) in einer kleinen Kugel $B_\epsilon((0, 0))$.