Mathematisches Institut
der HHU Düsseldorf
Prof. Dr. Oleg Bogopolski
Svenja Lage

SoSe 2019
Abgabe Di., 2.07, 10:20 Uhr

Analysis II

Übungsblatt 13 (Probeklausur)

Hinweise:

- Die Antworten in Aufgabe 1 sollen OHNE Beweise gegeben werden.
- Es ist immer genau eine Antwort richtig.
- Die Markierungen müssen deutlich sein.
- Beweise zu den Aufgaben 2-6 sind erforderlich. Es dürfen Sätze aus dem Skript benutzt werden. Die Voraussetzungen der Sätze müssen überprüft werden.

Aufgabe 1 (Multiple Choice) *(4 Punkte)*

(a) Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f \in C^1(X, \mathbb{R})$ mit $\nabla f = 0$, dann ist f konstant.

☐ Wahr ☐ Falsch

(b) Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Menge $A \subset X$ ist offen genau dann, wenn $A \cap \partial A = \emptyset$ gilt.

☐ Wahr ☐ Falsch

(c) Jede kontrahierende Abbildung $f : [2, 3] \cup [4, 5] \to [2, 3] \cup [4, 5]$ besitzt einen Fixpunkt.

☐ Wahr ☐ Falsch

(d) Genau eine der nachstehenden Formeln definiert eine Norm auf $\mathbb{R}^3$.

$$\|x\| = x_1 + \sqrt[5]{|x_2|^5 + |x_3|^5}, \quad \|x\| = \sqrt[3]{|x_1 x_2 x_3|}$$

☐ Wahr ☐ Falsch

Aufgabe 2 *(3+4+2 Punkte)*

Wir definieren $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch $p(x, y) = x$.
Zeigen oder widerlegen Sie:

(a) Wenn $A \subset \mathbb{R}^2$ offen ist, dann ist auch $p(A)$ offen.

(b) Wenn $A \subset \mathbb{R}^2$ abgeschlossen ist, dann ist auch $p(A)$ abgeschlossen.

(c) Wenn $A \subset \mathbb{R}^2$ kompakt ist, dann ist auch $p(A)$ kompakt.

Aufgabe 3 *(9 Punkte)*

Wir definieren $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch $f(x,y) = x^3 - xy + y^2$. Bestimmen Sie die kritischen Stellen und die lokalen Maxima und Minima von f.

Aufgabe 4 *(9 Punkte)*

Wir definieren $f : [0,3] \to \mathbb{R}^3$ durch

$$f(x) = \begin{pmatrix} x\cos(2x) \\ x\sin(2x) \\ \frac{2}{3}x^3 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Weglänge von f.

Aufgabe 5 *(4+5 Punkte)*

Es werden nur *reelle* Lösungen $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der folgenden DGL gesucht.

(a) Geben Sie ein Fundamentalsystem der folgenden Differentialgleichung an:

$$y'' - 4y' + 5y = 0.$$

(b) Geben Sie die Lösungsgesamtheit der folgenden Differentialgleichung an:

$$y'' - 4y' + 5y - e^x = 0.$$

Die nächste Aufgabe lösen Sie jetzt nicht!
Sie wird noch im Tutorium besprochen

Aufgabe 6

Beweisen Sie, dass die Gleichung $z^3 + xz + y = 0$ in einer Umgebung von $(x_0, y_0, z_0) = (2, -3, 1)$ nach z aufgelöst werden kann. Berechnen Sie die ersten partiellen Ableitungen der entsprechenden Funktion $z = g(x,y)$ in dem Punkt $(2, -3)$.