Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Oleg Bogopolski
Svenja Lage

SoSe 2019
Abgabe Di., 9.04, 10:20 Uhr

Analysis II

Übungsblatt 1

Aufgabe 1. Sei V die Menge aller stetigen Funktionen $f : [0,1] \to \mathbb{R}$.

(a) Überprüfen Sie, dass die Menge V mit der Verknüpfung $+$ und mit der Multiplikationen mit reellen Zahlen ein $\mathbb{R}$-Vektorraum bildet[1]. Dieser Vektorraum wird als $C[0,1]$ bezeichnet. [3P.]

(b) Für $f \in C[0,1]$ setzen wir

$$||f||_{\max} := \max\{|f(x)|\,|x \in [0,1]\},$$

$$||f||_{\text{int}} := \int_0^1 |f(x)|\,\mathrm{dx}.$$

Beweisen Sie, dass $||\cdot||_{\max}$ und $||\cdot||_{\text{int}}$ zwei Normen auf $C[0,1]$ sind. [3+3P.]

(c) Beweisen Sie, dass $||f||_{\text{int}} \leqslant ||f||_{\max}$ für alle $f \in C[0,1]$ ist. [2P.]

(d) Beweisen Sie: Ist $\varepsilon > 0$, so gibt es ein $f \in V$ mit $||f||_{\max} = 1$ und $||f||_{\text{int}} < \varepsilon$. [2+2P.]
Leiten Sie daraus ab, dass diese Normen auf $C[0,1]$ nicht äquivalent sind.

Aufgabe 2. Beweisen Sie:

(1) Sei d eine Metrik auf $\mathbb{R}^n$, die von einer Norm auf $\mathbb{R}^n$ induziert ist[2]. Dann erfüllt d die folgenden Eigenschaften: [2P.]

   (a) $d(\mathbf{0}, \alpha v) = |\alpha| \cdot d(\mathbf{0}, v)$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ und $v \in \mathbb{R}^n$.

   (b) $d(v + w, u + w) = d(v, u)$ für alle $u, v, w \in \mathbb{R}^n$.

(2) Sei d eine Metrik auf $\mathbb{R}^n$, die diese Eigenschaften erfüllt. Dann existiert eine Norm auf $\mathbb{R}^n$, die diese Metrik induziert. [5P.]

Fortsetzung Seite 2.

[1] Schauen Sie selbst die Definition eines Vektorraums im Netz an.

[2] Sei $(V, ||\cdot||)$ ein normierter Vektorraum. Eine Metrik D auf V heißt *induzierte* von $||\cdot||$, wenn $D(x,y) = ||x - y||$ für alle $x, y \in V$ gilt.

Aufgabe 3. Wir definieren eine Abbildung $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch

$$d\Big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\Big) := \begin{cases} |y_1 - y_2|, & \text{falls } x_1 = x_2, \\ |y_1| + |x_1 - x_2| + |y_2|, & \text{falls } x_1 \neq x_2. \end{cases}$$

(1) Der Balkon von Romeo befindet sich in Punkt R mit Koordinaten $(1, 3)$ und der Balkon von Julia in Punkt J mit Koordinaten $(4, 7)$. Berechnen Sie die Entfernung zwischem R und J bezüglich der Metriken, die von Normen $||\cdot||_1$, $||\cdot||_2$ und $||\cdot||_\infty$ induziert sind. [3P.]

(2) Beweisen Sie, dass d eine Metrik[3] auf $\mathbb{R}^2$ ist. Berechnen Sie $d(R, J)$. [2+2P.]

(3) Skizzieren Sie die Kugel $B_1((2, 2))$, $B_2((2, 2))$, $B_3((2, 2))$ und $B_4((2, 2))$ in dem metrischen Raum $(\mathbb{R}^2, d)$. [4P.]

(4) Berechnen Sie den Durchmesser (diameter) der Menge $M := \{(t, 2) \,|\, 0 < t < 2\}$ nach der Formel [2P.]
$$\operatorname{diam}(M) := \sup_{a,b \in M} d(a, b).$$

(5) Beweisen Sie: Es existiert keine Norm $||\cdot||$ auf $\mathbb{R}^2$, die die Metrik d induziert. [5P.]

Hinweis zu (5): Benutzen Sie Aufgabe 2.

[3] Die Metrik d heißt *Aufzug-Metrik*: Da Romeo nicht fliegen kann, muss er zweimal Aufzüge benutzen und eine Straße zu Fuß überqueren, um Julia zu erreichen.