Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Oleg Bogopolski
Svenja Lage

SoSe 2019
erstellt am 2.04.2019
keine Abgabe

Analysis II

Übungsblatt 0

Aufgabe 1.

(a) Sei $0 < p < 1$. Beweisen Sie, dass die folgende Ungleichung für alle $x \geqslant 0$ gilt:

$$x^p - px \leqslant 1 - p.$$

(b) Seien $p, q > 0$ reelle Zahlen mit $p + q = 1$. Beweisen Sie, dass für alle $a > 0$ und $b > 0$ gilt:

$$a^p b^q \leqslant pa + qb.$$

(c) Seien $p_1, p_2, \dots, p_n > 0$ reelle Zahlen mit $p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$. Beweisen Sie, dass für alle $a_1, \dots, a_n > 0$ gilt:

$$a_1^{p_1} a_2^{p_2} \dots a_n^{p_n} \leqslant p_1 a_1 + p_2 a_2 + \dots + p_n a_n.$$

Hinweis.
zu (a). Untersuchen Sie die Funktion $x^p - px$ auf dem Intervall $[0, \infty)$.
zu (b). 3(a) nutzen.
zu (c). Wenden Sie eine Induktion an.

Aufgabe 2.

(a) Geben Sie die Hölder-Ungleichung im $\mathbb{R}^n$ an. Welchen Bezug hat diese Ungleichung zu Cauchy-Schwarz-Ungleichung?

(b) Geben Sie die Minkowski-Ungleichung im $\mathbb{R}^n$ an. Welchen Bezug hat diese Ungleichung zum Thema "Normen"?

(c) Schreiben Sie die Definitionen der Normen $|| \cdot ||_p$ auf $\mathbb{R}^n$ für $1 \leqslant p \leqslant \infty$ auf.
Skizzieren Sie die folgenden Mengen:

c1) $\{x \in \mathbb{R}^2 \,|\, ||x||_1 = 1\}$,

c2) $\{x \in \mathbb{R}^2 \,|\, ||x||_2 = 1\}$,

c3) $\{x \in \mathbb{R}^2 \,|\, ||x||_3 = 1\}$,

c4) $\{x \in \mathbb{R}^2 \,|\, ||x||_\infty = 1\}$.