Musterlösungen zu Blatt 14

Aufgabe 1.

Entscheiden Sie jeweils, ob die Matrix A diagonalisierbar ist. Falls ja, finden Sie eine invertierbare Matrix T und eine Diagonalmatrix D, so dass

$$T^{-1}AT = D.$$

(a)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Bestimme zunächst die Eigenwerte:

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2,$$

somit ist $\lambda = 1$ der einzige Eigenwert. Berechne nun eine Basis für den zugehörigen Eigenraum.

$$A - 1 \cdot E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist bereits auf Zeilenstufenform, und wir erhalten mit $\{\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)\}$ eine Basis von $\mathrm{Eig}(A, 1)$. Nach Satz 25.1.8 ist die Matrix A also nicht diagonalisierbar.

(b)

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -6 \\ 0 & -4 & -6 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Bestimme wieder die Eigenwerte von A:

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & -3 & -6 \\ 0 & -4-\lambda & -6 \\ 0 & 3 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} -4-\lambda & -6 \\ 3 & 5-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (-1-\lambda)(\lambda^2 - \lambda - 2)$$

Nun ist $\chi_A(\lambda) = 0$ genau dann, wenn $\lambda = -1$ oder $\lambda = 2$. Bestimme zunächst eine Basis von $\mathrm{Eig}(A, -1)$.

$$A - (-1) \cdot E_3 = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -6 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

in Zeilenstufenform

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Also ist $\left\{ \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \right\}$ eine Basis von $\mathrm{Eig}(A, -1)$. Eine Basis von $\mathrm{Eig}(A, 2)$ erhalten wir durch

$$A - 2 \cdot E_3 = \begin{pmatrix} -3 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -6 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

in Zeilenstufenform

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Damit erhalten wir die Basis $\left\{ \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \right\}$ von $\mathrm{Eig}(A, 2)$. Nun ist A diagonalisierbar, und die Matrix T lässt sich mit den berechneten Eigenvektoren als

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

definieren. Dann ist

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2

Sei $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die lineare Abbildung mit $\varphi \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\varphi \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Seien weiter die folgenden Basen gewählt: $e = \{e_1, e_2\}$ mit $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $e' = \{e'_1, e'_2\}$ mit $e'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $e'_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

(a) Berechnen Sie die Übergangsmatrix T von e zu e'.

Stelle dazu jeden Basisvektor aus e' als Linearkombination in den Basisvektoren von e dar.

$$\begin{aligned} e'_1 &= \mathbf{1} \cdot e_1 + \mathbf{4} \cdot e_2 \quad &(1.\ \text{Spalte von } T) \\ e'_2 &= \mathbf{1} \cdot e_1 + \mathbf{5} \cdot e_2 \quad &(2.\ \text{Spalte von } T) \end{aligned}$$

somit ist

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

(b) Berechnen Sie die Übergangsmatrix T' von e' zu e.

$$\begin{aligned} e_1 &= \mathbf{5} \cdot e_1' + -\mathbf{4} \cdot e_2' \\ e_2 &= -\mathbf{1} \cdot e_1' + \mathbf{1} \cdot e_2' \end{aligned}$$

also ist

$$T' = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$$

(c) Berechnen Sie $T \cdot T'$ und $T' \cdot T$.

$$\begin{aligned} T \cdot T' &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ T' \cdot T &= \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(d) Berechnen Sie $[\varphi]_e^e$ und $[\varphi]_{e'}^{e'}$.

$$\begin{aligned} \varphi(e_1) &= \varphi(5e_1' - 4e_2') = 5\varphi(e_1') - 4\varphi(e_2') \\ &= 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 4 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= -\mathbf{7} \cdot e_1 + \mathbf{1} \cdot e_2 \quad \text{(1. Spalte von } [\varphi]_e^e) \\ \varphi(e_2) &= \varphi(-e_1' + e_2') = -\varphi(e_1') + \varphi(e_2') \\ &= -\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \mathbf{2} \cdot e_1 + \mathbf{0} \cdot e_2 \quad \text{(2. Spalte von } [\varphi]_e^e) \end{aligned}$$

Somit ist

$$[\varphi]_e^e = \begin{pmatrix} -7 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \varphi(e_1') &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{4} \cdot e_1' + (-\mathbf{3}) \cdot e_2' \\ \varphi(e_2') &= \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 3e_1 + 1e_2 = 3(5e_1' - 4e_2') + (-e_1' + e_2') = \mathbf{14} \cdot e_1' + -\mathbf{11} \cdot e_2' \end{aligned}$$

Also ist insgesamt

$$[\varphi]_{e'}^{e'} = \begin{pmatrix} 4 & 14 \\ -3 & -11 \end{pmatrix}.$$

(e) Überprüfen Sie durch Nachrechnen, ob die Gleichung $[\varphi]_{e'}^{e'} = T^{-1}[\varphi]_e^e T$ für die in (a)-(d) berechneten Matrizen erfüllt ist.

$$\begin{aligned} T^{-1}[\varphi]_e^e T &= \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -7 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -36 & 10 \\ 29 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 & 14 \\ -3 & -11 \end{pmatrix} = [\varphi]_{e'}^{e'} \end{aligned}$$