Hinweis: In den Aufgaben 2 bis 7 müssen Sie den Lösungsweg angeben.

Aufgabe 1 [18 Punkte]

a) Multiple-Choice: Entscheiden Sie, welche der folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Kreuzen Sie dazu jeweils das entsprechende Feld an. Achten Sie hierbei darauf, dass das angekreuzte Feld als solches zu erkennen ist. Für jede richtige Wahl erhalten Sie 2 Punkte, für jede falsche Wahl 0 Punkte. Wenn Sie bei einer Aussage kein Feld oder beide Felder ankreuzen, dann erhalten Sie ebenfalls keine Punkte.

	wahr	*falsch*
In $(S_5, \circ)$ gibt es ein Element mit Ordnung 6.	☐	☐
Es existiert ein Gruppenhomomorphismus $\varphi : (\mathbb{Z}_7, +_7) \longrightarrow (\mathbb{Z}_3, +_3)$ mit $\varphi(1) \neq 0$.	☐	☐
Sei R ein kommutativer Ring. Jedes Ideal I von R ist ein Unterring von R.	☐	☐
$\left\{ \begin{pmatrix} a \\ a^3 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{Z}_2 \right\}$ ist ein Untervektorraum von $(\mathbb{Z}_2)^2$.	☐	☐
Seien U, V endlich erzeugte K-Vektorräume mit $\dim_K(U) = \dim_K(V)$. Für jede lineare Abbildung $\varphi : U \to V$ gilt dann: φ ist surjektiv genau dann, wenn $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{0_U\}$.	☐	☐
Sei K ein Körper und $A \in M(n, n, K)$ nicht invertierbar, d.h. $\det(A) = 0$. Dann ist 0 ein Eigenwert von A.	☐	☐

b) Seien σ_1, $\sigma_2 \in (S_7, \circ)$ mit

$$\sigma_1 = (1\ 2\ 3)(2\ 3\ 4)(6\ 7),\ \sigma_2 = (1\ 3\ 5)$$

gegeben.
Geben Sie $\sigma := \sigma_1 \circ \sigma_2$ und $\tau := \sigma_2 \circ \sigma_1$ als Produkt von unabhängigen Zyklen an. Geben Sie weiterhin $\mathrm{sign}(\sigma)$ und $\mathrm{ord}(\sigma)$ an. [6 Punkte]

Aufgabe 2 [16 Punkte]

a) Verwenden Sie den euklidischen Algorithmus um den größten gemeinsamen Teiler von 63 und 47 zu bestimmen. [4 Punkte]

b) Ermitteln Sie $x, y \in \mathbb{Z}$ mit $63x + 47y = \mathrm{ggT}(63, 47)$. [4 Punkte]

c) Bestimmen Sie ein Element $z \in \mathbb{Z}_{63}$, für das $z \bullet_{63} 47 = 1$ erfüllt ist. [4 Punkte]

d) Berechnen Sie ein Element $t \in \mathbb{Z}_{63}$, welches $t \bullet_{63} 47 = 5$ erfüllt. [4 Punkte]

Aufgabe 3 [14 Punkte]

a) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem für das reelle lineare Gleichungssystem

$$\left\{\begin{array}{rrrrcl} 3x_1 & +\,2x_2 & +\,4x_3 & & = & 0 \\ x_1 & +\,x_2 & +\,2x_3 & -\,x_4 & = & 0 \\ & 2x_2 & +\,4x_3 & -\,6x_4 & = & 0. \end{array}\right.$$

[9 Punkte]

b) Sei $A \in M(n, n, \mathbb{R})$ eine Matrix mit $\det(A) \in \{-1, 1\}$ und $A_{ij} \in \mathbb{Z}$ für alle $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Zeigen Sie: $(A^{-1})_{ij} \in \mathbb{Z}$ für alle $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. [5 Punkte]

Aufgabe 4 [18 Punkte]

a) Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} -5 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \in M(3,3,\mathbb{R}).$$

Bestimmen Sie für A und B jeweils alle Eigenwerte und die Dimension der zugehörigen Eigenräume. Geben Sie weiterhin an, ob die Matrix A oder B diagonalisierbar ist. [14 Punkte]

b) Sei K ein Körper und $A, T \in M(n,n,K)$ mit $\det(T) \neq 0$. Nach Vorlesung gilt: λ ist ein Eigenwert von A genau dann, wenn λ ein Eigenwert von $T^{-1}AT$ ist. Zeigen Sie: $v \in \mathrm{Eig}(A,\lambda) \Leftrightarrow T^{-1}v \in \mathrm{Eig}(T^{-1}AT,\lambda)$. [4 Punkte]

Aufgabe 5 [18 Punkte]

a) Betrachten Sie die Basis $B = \{u_1, u_2, u_3\}$ des Untervektorraumes $U = \mathcal{L}(u_1, u_2, u_3) \subset \mathbb{R}^4$, wobei

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \; u_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Seien $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie Indizes $i, j \in \{1, 2, 3\}$, so dass $B \setminus \{u_i, u_k\} \cup \{v_1, v_2\}$ eine Basis von U ist. [10 Punkte]

b) Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Inverse Matrix von A, indem Sie auf die Matrix $(A \mid E_3)$ elementare Zeilenumformungen anwenden. [8 Punkte]

Aufgabe 6 [8 Punkte]
Sei $(G, *)$ eine Gruppe und $h \in G$. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\begin{array}{rccc} \varphi_h : & G & \longrightarrow & G \\ & g & \mapsto & h * g * h^{-1} \end{array}$$

ein bijektiver Gruppenhomomorphismus ist.

Aufgabe 7 [8 Punkte]
Sei V ein Vektorraum mit der Basis $\{b_1, \ldots, b_n\}$ und

$$f_1 := b_1 \text{ sowie } \; f_i := f_{i-1} + b_i = b_1 + b_2 + \cdots + b_{i-1} + b_i \text{ für } 2 \leqslant i \leqslant n, \text{ falls } n \geqslant 2.$$

Beweisen Sie ausführlich: $\{f_1, \ldots, f_n\}$ ist eine Basis von V.