Gruppentheorie, WS 12/13

(Prof. Dr. O. Bogopolski)

1 Vorlesung
Präsentationen von Gruppen (Teil I)

Definition 1.1. Sei G eine Gruppe und sei X eine Teilmenge von G. Man sagt, dass *G von X erzeugt ist*, falls jedes Element $g \in G$ in der Form $g = x_1 x_2 \dots x_n$ geschrieben werden kann, wobei alle x_i in $X \cup X^{-1}$ liegen. Man schreibt $G = \langle X \rangle$.

Sei $G = \langle X \rangle$. Ein formales Wort R in dem Alphabet $X \cup X^{-1}$ heißt *Relation in G bezüglich X*, falls R betrachtet als Element von G gleich 1 ist.

Bemerkung – Definition 1.2. Sei $G = \langle X \rangle$ und seien
- $r_1, \dots, r_m$ einige Relationen in G bezüglich X
- $g_1, \dots, g_k$ beliebige Wörter in dem Alphabet $X \cup X^{-1}$
- $n_1, \dots, n_k$ beliebige ganze Zahlen.

Dann ist das Wort $\prod\limits_{i=1}^{k} g_i^{-1} R_i^{n_i} g_i$ auch eine Relation, falls $R_1, \dots, R_k \in \{r_1, \dots, r_m\}$ ist.
Solche Relation heißt *Folgerung* aus den Relationen $r_1, \dots, r_m$.

Definition 1.3. Sei $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ ein Erzeugungssystem in G, sei $\mathcal{R} = \{r_1, \dots, r_m\}$ eine Menge von Relationen in G bezüglich X. Dann heißt $\langle x_1, \dots, x_n \,|\, r_1, \dots, r_m \rangle$ *Präsentation* von G falls jede Relation in G eine Folgerung der Relationen $r_1, \dots, r_m$ ist.

Beispiel 1.4. Die Permutationsgruppe S_3 hat die Präsentation $\langle x, y \,|\, x^2, y^2, (xy)^3 \rangle$, wobei $x = (12)$, $y \in (13)$ ist.

2 Vorlesung
Freie Gruppen[1]

Definition 2.1. Eine Gruppe F heißt *frei*, wenn sie eine Teilmenge X hat, so dass $X \cap X^{-1} = \emptyset$ ist und jedes Element $f \in F$ auf genau eine Weise in der Form $f = x_1 x_2 \dots x_n$ geschrieben werden kann, wobei $x_i \in X \cup X^{-1}$ und $x_i x_{i+1} \neq 1$ für alle i ist. Diese Form heißt *irreduzibel*. Die Menge X heißt *Basis* von F.

Die *Länge des Elements f bezüglich X* ist n und wird als $|f|$ bezeichnet.

Satz 2.2. Für jede Menge X existiert eine freie Gruppe mit der Basis X. Alle freien Gruppen mit der Basis X sind isomorph. (Wir bezeichnen eine als $F(X)$.)

Satz 2.3. Eine Gruppe F ist frei mit der Basis X nur dann, wenn für jede Gruppe G und jede Abbildung $X \xrightarrow{\phi} G$ ein einziger Homomorphismus $F \xrightarrow{\phi^*} G$ mit $\phi^*|_X = \phi$ existiert.

[1]Siehe die Seiten 52-56 des Buches von O. Bogopolski "Introduction to Group Theory".

Satz 2.4. Alle Basen einer freien Gruppe haben dieselbe Kapazität.

Diese Kapazität heißt *Rang* der freien Gruppe.

3 Vorlesung Nielsen-Methode[2]

Behauptung 3.1. Sei (u, v) eine Basis der freien Gruppe F. Dann gelten:
1) (u, vu^ε) und $(u, u^\varepsilon v)$, $\varepsilon = \pm 1$ sind die Basen von F,
2) (v, u) ist eine Basis von F,
3) (u, v^{-1}) ist eine Basis von F.

Beispiel. $(ababa^{-1}, ab)$ ist eine Basis der freien Gruppe $F(a, b)$:

$$(ababa^{-1}, ab) \to (aba^{-1}, ab) \to (a^{-1}, ab) \to (a^{-1}, b) \to (a, b).$$

Frage. Wie kann man algorithmisch erkennen, ob eine Teilmenge U einer freien Gruppe $F(X)$ eine Basis von $F(X)$ ist?

Definition 3.2. Sei $U = (u_1, \dots, u_m)$ ein Tupel von Elementen einer freien Gruppe $F(X)$.

Nielsen-Transformationen sind:

(T1) ein u_i nach u_i^{-1} ersetzen,
(T2) ein u_i nach $u_i u_j$ ersetzen, wobei $i \neq j$ ist,
(T3) u_i ausstreichen, wenn $u_i = 1$ ist.

U heißt *Nielsen-irreduzibel*, wenn für alle $v_1, v_3, v_3 \in U^\pm$ gilt

(N1) $v_1 \neq 1$,
(N2) aus $v_1 v_2 \neq 1$ folgt $|v_1 v_2| \geqslant |v_1|, |v_2|$,
(N3) aus $v_1 v_2 \neq 1$ und $v_2 v_3 \neq 1$ folgt $|v_1 v_2 v_3| > |v_1| - |v_2| + |v_3|$,

Behauptung 3.3. Transformieren wir ein Tupel U in ein anderes Tupel U' mit Hilfe der Nielsen-Transformationen (T1)-(T3). Dann gilt $\langle U \rangle = \langle U' \rangle$.

Behauptung 3.4. Sei $U_{Nirr} = (u_1, \dots, u_m)$ ein Nielsen-irreduzibles Tupel in $F(X)$. Sei $v = v_1 v_2 \dots v_k$ ein Produkt, wobei $k \geqslant 0$, $v_i \in U_{Nirr}^\pm$ und $v_i v_{i+1} \neq 1$ ist. Dann ist $|v| \geqslant k$. Insbesondere ist $\langle U_{Nirr} \rangle$ eine freie Gruppe mit der Basis U_{Nirr}.

Satz 3.5. Man kann jedes Tupel $U = (u_1, \dots, u_m)$ von Elementen einer freien Gruppe F in ein Nielsen-irreduzibles Tupel U_{Nirr} mit Hilfe der Nielsen-Transformationen transformieren.

Folgerung 3.6. Die Gruppe $\langle U \rangle$ ist frei mit der Basis U_{Nirr}. Insbesondere jede endlich erzeugte Untergruppe einer freien Gruppe ist frei.

Folgerung 3.7. Ein Tupel U von Elementen aus $F(X)$ ist eine Basis von $F(X)$ nur dann, wenn $|U| = |X|$ ist und $U_{Nirr} = X$ bis zu Inversionen in X gilt.

[2]Siehe die Seiten 123-124 des Buches von O. Bogopolski “Introduction to Group Theory”. Auch siehe die erste 10 Seiten des Buches von R. Lyndon, P. Schupp “Combinatorial group theory”.

4 Vorlesung
Präsentationen von Gruppen (Teil II)

Satz 4.1. Sei $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ ein Alphabet und seien $r_1, \dots, r_m$ Wörter in $F(X)$. Dann existiert eine Gruppe G mit der Präsentation $\langle x_1, \dots, x_n \,|\, r_1, \dots, r_m \rangle$.

Satz 4.2. Sei G eine Gruppe mit der Präsentation $\langle x_1, \dots, x_n \,|\, r_1, \dots, r_m \rangle$ und sei H eine andere Gruppe. Eine Abbildung $\varphi : \{x_1, \dots, x_n\} \to H$ kann bis zu einem Homomorphismus $\varphi^* : G \to H$ fortgesetzt werden, falls $r_i(\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_n)) = 1$ in H für alle $i = 1, \dots, m$ ist.

Satz 4.3. Die Permutationsgruppe S_n hat die Präsentation

$$\langle t_1, t_2, \dots, t_{n-1} \,|\, t_i^2,\, t_i t_{i+1} t_i = t_{i+1} t_i t_{i+1},\, t_i t_j = t_j t_i \,(|i-j| > 1) \rangle.$$

5 Vorlesung
Untergruppen von freien Gruppen

A. Stallings-Faltungen von X-Graphen

Definition 5.1. Sei Γ ein Graph. Sei Γ^0 die Menge seiner Eckpunkte und Γ^1 die Menge seiner Kanten. Der Anfang einer Kante e wird als $\alpha(e)$ bezeichnet und das Ende als $\omega(e)$. Die Kante inverse zu e wird als $\overline{e}$ bezeichnet. Aus jedem Paar zueinander inversen Kanten wählen wir eine Kante und bezeichnen die Menge von ausgewählten Kanten mit $(\Gamma^1)^+$. Diese Menge von Kanten heißt *Orientierung* von Γ.

Ein *Weg* in Γ ist eine endliche Folge der Kanten: $p = e_1 e_2 \dots e_k$, so dass $\alpha(e_{i+1}) = \omega(e_i)$ ist. Der Weg p heißt *irreduzibel*, falls $e_{i+1} \neq \overline{e_i}$ für alle i ist. Der Weg $\bar{p} = \bar{e}_k \bar{e}_{k-1} \dots \bar{e}_1$ heißt *inverser Weg* zu p. Wir setzen $\alpha(p) := \alpha(e_1)$ und $\omega(p) := \omega(e_k)$. Der Graph Γ heißt *zusammenhängend*, falls für je zwei Eckpunkte u, v in Γ ein Weg p in Γ mit $\alpha(p) = v$ und $\omega(p) = u$ existiert.

Ein Graph heißt *Baum*, falls er zusammenhängend ist und keine Zyklen enthält. Ein Teilgraph T in Γ heißt *maximaler Baum* in Γ, falls T ein Baum ist und es keinen Baum T' in Γ mit $T \subsetneqq T'$ gibt. Man kann beweisen, dass $T^0 = \Gamma^0$ ist.

Sei X eine Basis einer freien Gruppe F. Der Graph Γ heißt X-*Graph*, falls jede seiner Kanten e mit einem $x \in X \cup X^{-1}$ markiert ist und die zueinander inversen Kanten mit zueinander inversen Buchstaben markiert sind. Wir schreiben $\mathrm{Lab}(e) = x$. Dann gilt $\mathrm{Lab}(\bar{e}) = (\mathrm{Lab}(e))^{-1}$. Für einen Weg $p = e_1 e_2 \dots e_k$ in Γ definieren wir seine Markierung mit der Formel $\mathrm{Lab}(p) := \mathrm{Lab}(e_1)\mathrm{Lab}(e_2) \dots \mathrm{Lab}(e_k)$.

Wir fixieren einen Eckpunkt $v \in \Gamma^0$ und betrachten die Menge

$$H(\Gamma, v) := \{\mathrm{Lab}(p) \,|\, p \text{ ist ein Weg in } \Gamma \text{ mit } \alpha(p) = \omega(p) = v\}.$$

Es ist klar, dass $H(\Gamma, v)$ eine Untergruppe in $F(X)$ ist.

Definition 5.2. Sei Γ ein X-Graph. Wenn zwei verschiedene Kanten e_1, e_2 einen gleichen Anfang und eine gleiche Markierung x haben, falten wir die zwei Kanten in eine neue Kante e mit der Markierung x. Den neuen X-Graph bezeichnen wir als Γ_1 und sagen, dass Γ nach Γ_1 *gefaltet* ist. Sei $\Gamma \succ \Gamma_1 \succ \Gamma_2 \succ \cdots \succ \Gamma_n$ eine Faltungs-Reihe und Γ_n kann nicht weiter gefaltet werden. Wir bezeichnen $St(\Gamma) := \Gamma_n$.

Behauptung 5.3. Sei Γ ein X-Graph, wobei X Basis einer freien Gruppe $F(X)$ ist. Wenn Γ nach Γ_1 gefaltet ist, dann gilt $H(\Gamma, v) = H(\Gamma_1, v)$. Insbesondere gilt $H(\Gamma, v) = H(St(\Gamma), v)$.

B. Eine Basis einer endlich erzeugten Untergruppe von $F(X)$

Satz 5.4. Sei Δ ein zusammenhängender X-Graph, der *nicht weiter gefaltet werden kann.* Sei v ein ausgewählter Eckpunkt von Δ und sei $(\Delta^1)^+$ eine Orientierung von Δ. Wir wählen einen maximalen Baum T in Δ. Für jede Kante e sei p_e ein Weg in Δ, der in v startet, in T bis $\alpha(e)$ läuft, dann durch e und schließlich in T von $\omega(e)$ bis v läuft. Dann ist die Untergruppe $H(\Delta, v)$ von $F(X)$ frei mit der Basis

$$\{\mathrm{Lab}(p_e) \,|\, e \in (\Delta^1)^+ \setminus T^1\}.$$

Satz 5.5. Sei $H = \langle u_1, \ldots, u_m \rangle$ eine endlich erzeugte Untergruppe einer freien Gruppe $F(X)$. Sei Γ_H der X-Graph mit einem ausgewählten Punkt v und m Schleifen; die i-te Schleife hat $|u_i|$ Kanten und die Markierung u_i, $i = 1, \ldots, m$. Wir setzen $\Delta = St(\Gamma_H)$. Dann ist die Untergruppe H frei mit der Basis wie im Satz 5.4.

6 Nielsen-Schreier Formel und der Schnitt von zwei Untergruppen einer freien Gruppe

Wir vervollständigen $St(\Gamma_H)$ bis zur einem Graph $\widetilde{St(\Gamma_H)}$ durch das Einkleben von unendlichen markierten Bäumen, so dass die folgende Eigenschaft erfüllt wird:

Für jeden Eckpunkt u in $\widetilde{St(\Gamma_H)}$ und für jedes Element $x \in X \cup X^{-1}$ existiert genau eine Kante e in $\widetilde{St(\Gamma_H)}$ mit $\alpha(e) = u$ und $\mathrm{Lab}(e) = x$.

Satz 6.1. Sei H eine Untergruppe einer freien Gruppe $F(X)$. Dann gilt:

$$|F(X) : H| = |(\widetilde{St(\Gamma_H)})^0|.$$

Satz 6.2. Sei $H = \langle u_1, \ldots, u_m \rangle$ eine endlich erzeugte Untergruppe einer freien Gruppe $F(X)$.

a) Gegeben $g \in F(X)$, man kann algorithmisch entscheiden, ob g in H liegt.
b) Man kann den Index von H in $F(X)$ finden.

Satz 6.3. (Nielsen-Schreier Formel) Sei H eine Untergruppe einer freien Gruppe $F(X)$. Wenn X und $|F(X):H|$ endlich sind, dann gilt

$$\mathrm{rk}(H) - 1 = |F(X):H| \cdot (\mathrm{rk}(F(X)) - 1).$$

Definition 6.4. Seien Γ und Δ zwei X-Graphen. Das *Pullback* von Γ und Δ ist ein X-Graph $P = P(\Gamma, \Delta)$ mit $P^0 = \Gamma^0 \times \Delta^0$, so dass in P eine Kante von $(u, w) \in P^0$ nach $(u', w') \in P^0$ mit der Markierung $x \in X \cup X^{-1}$ genau dann existiert, wenn
1) in Γ eine Kante von u nach u' mit der Markierung x existiert,
2) in Δ eine Kante von w nach w' mit der Markierung x existiert.

Satz 6.5. Seien A, B zwei Untergruppen einer freien Gruppe $F(X)$ und sei P das Pullback von $St(\Gamma_A)$ und $St(\Gamma_B)$. Seien v_A und v_B ausgewählte Punkte in den Graphen $St(\Gamma_A)$ und $St(\Gamma_B)$ und sei P' die Komponente von P, die den Punkt $v = (v_A, v_B)$ enthält. Dann ist $A \cap B = H(P', v)$.

Satz 6.6. Gegeben zwei endlich erzeugte Untergruppen $A = \langle a_1, \dots, a_k \rangle$ und $B = \langle b_1, \dots, b_m \rangle$ einer freien Gruppe $F(X)$, man kann algorithmisch eine Basis von $A \cap B$ finden.

Beispiel 6.7. Es gibt genau drei Untergruppen des Index 2 in $F(a, b)$:

$$\begin{aligned} H_1 &:= \langle a, b^2, b^{-1}ab \rangle, \\ H_2 &:= \langle b, a^2, a^{-1}ba \rangle, \\ H_3 &:= \langle a^2, b^2, ab \rangle. \end{aligned}$$

Eine Basis der Untergruppe $H_1 \cap H_3$ ist

$$\{a^2, ba^{-1}b^{-1}a^{-1}, abab, ab^2a^{-1}, aba^2b^{-1}a^{-1}\}.$$

7 Fox-Calculus

7.1. Definition. Sei G eine Gruppe. Betrachten wir die Menge aller endlichen formalen Summen $\sum'_{g \in G} n_g g$, wobei $n_g \in \mathbb{Z}$ ist. Die Endlichkeit bedeutet, dass alle Koeffizienten n_g außer einer endlichen Anzahl gleich 0 sind.

Man kann zwei solcher Summen addieren und multiplizieren. Daraus entsteht ein Ring, der *Gruppenring* von G heißt. Der Ring wird als $\mathbb{Z}G$ bezeichnet.

7.2. Definition. Sei $F = F(X)$ eine freie Gruppe mit der Basis X. Für jedes $x \in X$ definieren wir eine Fox-Ableitung

$$\frac{\partial}{\partial x} : F \to \mathbb{Z}F$$

nach der folgenden Regel:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = u_1 + \dots + u_k - x^{-1}v_1 - \dots - x^{-1}v_s,$$

wobei $u_1, \ldots, u_k$ die Unterworte von w sind, die nach Auftreten von x in w stehen, und $v_1, \ldots, v_s$ die Unterworte von w sind, die nach Auftreten von x^{-1} in w stehen. Das leere Unterwort wird mit e identifiziert.

7.3. Beispiel.
1) $\frac{\partial}{\partial x}(x^{-1}y^{-1}xy) = y - x^{-1}y^{-1}xy$,
2) $\frac{\partial}{\partial y}(x^{-1}y^{-1}xy) = e - y^{-1}xy$,
3) $\frac{\partial}{\partial x}(x^n) = x^{n-1} + \cdots + x + e$ für $n > 0$,
4) $\frac{\partial}{\partial x}(x^{-n}) = x^{-n} + \cdots + x^{-1}$ für $n > 0$,

7.4. Behauptung. Seien $x, y \in X$ und $u, v \in F$. Dann gelten die Formeln

1)
$$\frac{\partial y}{\partial x} = \begin{cases} e, & \text{wenn } x = y \text{ ist,} \\ 0, & \text{wenn } x \neq y \text{ ist,} \end{cases}$$

2)
$$\frac{\partial}{\partial x}(x^{-1}) = -x^{-1},$$

3)
$$\frac{\partial}{\partial x}(uv) = \frac{\partial u}{\partial x}v + \frac{\partial v}{\partial x}.$$

7.5. Satz (Kettenregel). Seien $v_1, \ldots, v_k \in F(X)$ und $w = w(v_1, \ldots, v_k)$. Dann gilt

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial v_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial w}{\partial v_i}$$

für alle $x \in X$.

7.6. Satz (Teilor-Formel). Für alle $w \in F(x_1, \ldots, x_n)$ gilt

$$w - e = \sum_{i=1}^{n} (x_i - e) \cdot \frac{\partial w}{\partial x_i}.$$

8 Tietze – Transformationen und Fox-Calculus

Eine Gruppe kann verschiedene Präsentationen haben. Aber von einer Präsentation zur anderen kann man mit Hilfe von Tietze – Transformationen gehen.

Definition 8.1.

(1) Tietze – Transformation des Typs 1:

$$\langle x_1, \ldots, x_n \,|\, r_1, \ldots, r_m \rangle \to \langle x_1, \ldots, x_n \,|\, r_1, \ldots, r_m, r \rangle,$$

wobei r eine Folgerung aus den Relationen $r_1, \ldots, r_m$ ist.

(2) Tietze – Transformation des Typs 2:

$$\langle x_1, \ldots, x_n \,|\, r_1, \ldots, r_m \rangle \to \langle x_1, \ldots, x_n, y \,|\, r_1, \ldots, r_m, yw^{-1} \rangle,$$

wobei $y \notin \{x_1, \ldots, x_n\}$ und $w \in F(x_1, \ldots, x_n)$ ist.

Satz 8.2. (Tietze) Seien $\langle x_1, \ldots, x_n \,|\, r_1, \ldots, r_m \rangle$ und $\langle y_1, \ldots, y_k \,|\, s_1, \ldots, s_\ell \rangle$ zwei endliche Präsentationen einer Gruppe G. Dann kann man die zweite Präsentation aus der ersten mit Hilfe endlicher Anwendungen der Tietze – Transformationen (1) und (2) und ihrer Inversen bekommen.

Definition 8.3. Sei G eine Gruppe mit der Präsentation $\mathcal{P} = \langle x_1, \ldots, x_n \,|\, r_1, \ldots, r_m \rangle$. Wir bezeichnen $F = F(x_1, \ldots, x_n)$. Dann existiert ein natürlicher Homomorphismus $\varphi : F \to G$. Der kann bis zum Homomorphismus $\varphi^* : \mathbb{Z}F \to \mathbb{Z}G$ fortgesetzt werden.

Die *Matrix* der Päsentation $\mathcal{P}$ ist die Matrix

$$M(\mathcal{P}) = \begin{pmatrix} \varphi^*(\frac{\partial r_1}{\partial x_1}) & \ldots & \varphi^*(\frac{\partial r_m}{\partial x_1}) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi^*(\frac{\partial r_1}{\partial x_n}) & \ldots & \varphi^*(\frac{\partial r_m}{\partial x_n}) \end{pmatrix}.$$

Satz 8.4. Sei G eine Gruppe mit der Präsentation $\mathcal{P} = \langle x_1, \ldots, x_n \,|\, r_1, \ldots, r_m \rangle$.
Wir betrachten eine Tietze – Transformation des Typs (1):

$$\mathcal{P} = \langle x_1, \ldots, x_n \,|\, r_1, \ldots, r_m \rangle \to \mathcal{P}' = \langle x_1, \ldots, x_n \,|\, r_1, \ldots, r_m, r \rangle$$

und die entsprechende Transformation von assoziierten Matrizen:

$$M(\mathcal{P}) = \begin{pmatrix} \varphi^*(\frac{\partial r_1}{\partial x_1}) & \ldots & \varphi^*(\frac{\partial r_m}{\partial x_1}) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi^*(\frac{\partial r_1}{\partial x_n}) & \ldots & \varphi^*(\frac{\partial r_m}{\partial x_n}) \end{pmatrix} \to M(\mathcal{P}') = \begin{pmatrix} \varphi^*(\frac{\partial r_1}{\partial x_1}) & \ldots & \varphi^*(\frac{\partial r_m}{\partial x_1}) & \varphi^*(\frac{\partial r}{\partial x_1}) \\ \vdots & & & \vdots \\ \varphi^*(\frac{\partial r_1}{\partial x_n}) & \ldots & \varphi^*(\frac{\partial r_m}{\partial x_n}) & \varphi^*(\frac{\partial r}{\partial x_n}) \end{pmatrix}.$$

Dann ist die letzte Spalte der Matrix $M(\mathcal{P}')$ eine lineare Kombination der Spalten von Matrix $M(\mathcal{P})$ mit Koeffizienten aus $\mathbb{Z}G$. Genauer: es existieren $c_1, \ldots, c_m \in \mathbb{Z}G$, so dass das Folgende gilt:

$$\begin{pmatrix} \varphi^*(\frac{\partial r}{\partial x_1}) \\ \vdots \\ \varphi^*(\frac{\partial r}{\partial x_n}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi^*(\frac{\partial r_1}{\partial x_1}) \\ \vdots \\ \varphi^*(\frac{\partial r_1}{\partial x_n}) \end{pmatrix} \cdot c_1 + \cdots + \begin{pmatrix} \varphi^*(\frac{\partial r_m}{\partial x_1}) \\ \vdots \\ \varphi^*(\frac{\partial r_m}{\partial x_n}) \end{pmatrix} \cdot c_m.$$

Satz 8.5. Sei G eine Gruppe mit der Präsentation $\mathcal{P} = \langle x_1, \ldots, x_n \,|\, r_1, \ldots, r_m \rangle$. Wir betrachten eine Tietze – Transformation des Typs (2):

$$\mathcal{P} = \langle x_1, \ldots, x_n \,|\, r_1, \ldots, r_m \rangle \to \mathcal{P}' = \langle x_1, \ldots, x_n, y \,|\, r_1, \ldots, r_m, yw^{-1} \rangle.$$

Dann sieht die entsprechende Transformation von assoziierten Matrizen so aus:

$$M(\mathcal{P}) = \begin{pmatrix} \varphi^*(\frac{\partial r_1}{\partial x_1}) & \ldots & \varphi^*(\frac{\partial r_m}{\partial x_1}) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi^*(\frac{\partial r_1}{\partial x_n}) & \ldots & \varphi^*(\frac{\partial r_m}{\partial x_n}) \end{pmatrix} \to M(\mathcal{P}') = \begin{pmatrix} \varphi^*(\frac{\partial r_1}{\partial x_1}) & \ldots & \varphi^*(\frac{\partial r_m}{\partial x_1}) & \star \\ \vdots & & & \vdots \\ \varphi^*(\frac{\partial r_1}{\partial x_n}) & \ldots & \varphi^*(\frac{\partial r_m}{\partial x_n}) & \star \\ 0 & & 0 & w^{-1} \end{pmatrix}.$$

9 Knoten (Teil I)

9.1 Fundamentalgruppe eines topologisches Raumes

Sei X ein topologischer Raum. Ein *Weg* in X ist eine stetige Abbildung $p : [0,1] \to X$. Der Weg $\overline{p}$ *inversen* zu p wird mit der Formel $\overline{p}(t) := p(1-t)$ für $t \in [0,1]$ definiert. Für $x \in X$ definieren wir den Weg id_x mit der Formel $id_x(t) = x$ für $t \in [0,1]$.

Der Raum X heißt *zusammenhängend*, falls keine Zerlegung $X = X_1 \coprod X_2$ mit offenen X_1, X_2 und $X_1 \cap X_2 = \varnothing$ existiert. Der Raum X heißt *wegzusammenhängend*, falls für je zwei Punkte $x_1, x_2 \in X$ ein Weg p in X mit $\alpha(p) = x_1$ und $\omega(p) = x_2$ existiert.

Seien p und q zwei Wege in X mit $\omega(p) = \alpha(q)$. Dann ist ihr Produkt $p \cdot q$ mit der folgenden Formel definiert:

$$(p \cdot q)(t) = \begin{cases} p(2t), & \text{falls } 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}, \\ q(2t-1), & \text{falls } \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

Zwei Wege p, q in X mit $\alpha(p) = \alpha(q)$ und $\omega(p) = \omega(q)$ heißen *homotop*, falls eine stetige Abbildung $F : [0,1] \times [0,1] \to X$ existiert, so dass

$$F_{|[0,1]\times\{0\}} = q, \quad F_{|[0,1]\times\{1\}} = p,$$

$$F_{|\{0\}\times[0,1]}((0,s)) = \alpha(p), \quad F_{|\{1\}\times[0,1]}((0,t)) = \omega(p)$$

für alle $s, t \in [0,1]$ gilt. Die Äquivalenzklasse der Wege, die dem Weg p homotop sind, wird mit $[p]$ bezeichnet.

Sei X ein zusammenhängender und wegzusammehängender topologischer Raum und sei x ein ausgewählter Punkt in X. Die Menge

$$\pi_1(X, x) := \{[p] \,|\, p \text{ ist ein Weg in } X \text{ mit } \alpha(p) = \omega(p) = x\}$$

mit der Multiplikation $[p] \cdot [q] := [pq]$ ist eine Gruppe. Das Element inverse zu $[p]$ ist $[\overline{p}]$ und das neutrale Element ist $[id_x]$.

Diese Gruppe heißt *Fundamentalgruppe* des Raumes X bezüglich x. Man kann zeigen, dass $\pi_1(X, x) \cong \pi_1(X, y)$ für alle $x, y \in X$ ist.

Beispiel.

1) Sei X ein Disk mit n “Disklöchern”. Dann ist $\pi_1(X,x)$ die freie Gruppe des Ranges n.

2) Sei X ein Torus. Dann hat $\pi_1(X,x)$ die Präsentation $\langle a,b \,|\, a^{-1}b^{-1}ab\rangle$.

Satz 9.1.1 Seien X,Y zwei zusammenhängende und wegzusammenhängende Räume. Jede stetige Abbildung $f : X \to Y$ induziert einen Homomorphismus

$$\begin{aligned} f_* :\ & \pi_1(X,x) \to \pi_1(Y,f(x)) \\ & [p] \mapsto [f(p)]. \end{aligned}$$

Wenn f ein Homöomorphismus ist, dann ist f_* ein Isomorphismus. Insbesondere homöomorphe topologische Räume haben isomorphe Fundamentalgruppen.

9.2 Fundamentalgruppe eines Knotens

Definition 9.2.1.

1) Ein (zahmer) *Knoten* in $\mathbb{R}^3$ ist das Bild einer injektiven und unendlich differenzierbaren Abbildung von dem Kreis $\{e^{i\varphi} \,|\, 0 \leqslant \varphi < 2\pi\}$ in $\mathbb{R}^3$.
2) Die *Fundamentalgruppe des Knotens* $K \subset \mathbb{R}^3$ ist $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K, x)$.
3) Zwei Knoten K_1, K_2 heißen *äquivalent*, falls ein Homöomorphismus $\varphi : (\mathbb{R}^3 \setminus K_1) \to (\mathbb{R}^3 \setminus K_2)$ existiert.

Satz 9.2.2. Äquivalente Knoten haben isomorphe Fundamentalgruppen.

Satz 9.2.3. (Wirtinger)

1) Gegeben ein Knoten K durch seine Projektion, dann kann man eine Präsentation seiner Fundamentalgruppe $G = \pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K, x)$ aufschreiben.

2) Es gilt $G/[G,G] \cong \mathbb{Z}$.

Jetzt ergänzen wir die Definition 8.3 bis zur der folgenden Definition.

Definition 9.2.4. Sei G eine Gruppe mit der Präsentation $\mathcal{P} = \langle x_1,\dots,x_n \,|\, r_1,\dots,r_m\rangle$. Wir bezeichnen $F = F(x_1,\dots,x_n)$. Dann existiert ein natürlicher Homomorphismus $\varphi : F \to G$. Der kann bis zum Homomorphismus $\varphi^* : \mathbb{Z}F \to \mathbb{Z}G$ fortgesetzt werden. Dieser induziert einen Homomorphismus $\varphi_{\mathrm{ab}} : \mathbb{Z}F \to \mathbb{Z}(G/[G,G])$.

Die *abelianisierte Matrix* der Päsentation $\mathcal{P}$ ist die Matrix

$$M(\mathcal{P})_{\mathrm{ab}} = \begin{pmatrix} \varphi_{\mathrm{ab}}(\frac{\partial r_1}{\partial x_1}) & \dots & \varphi_{\mathrm{ab}}(\frac{\partial r_m}{\partial x_1}) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_{\mathrm{ab}}(\frac{\partial r_1}{\partial x_n}) & \dots & \varphi_{\mathrm{ab}}(\frac{\partial r_m}{\partial x_n}) \end{pmatrix}.$$

Definition 9.2.5. Der Ring von Laurent-Polynomen ist der Ring

$$\mathbb{Z}[t,t^{-1}] := \{\sum_{i=n}^{m} a_i t^i \,|\, a_i \in \mathbb{Z}; n,m \in \mathbb{Z}, n \leqslant m\}.$$

bezüglich der natürlichen Addition und Multiplikation.

Beobachtung 9.2.6. Sei G eine Gruppe mit $G/[G,G] \cong \mathbb{Z}$. Dann ist der Gruppenring $\mathbb{Z}(G/[G,G])$ dem Ring von Laurent-Polynomen $\mathbb{Z}[t,t^{-1}]$ isomorph. Sei

$$\mathcal{P} = \langle x_1, \dots, r_n \,|\, r_1, \dots, r_m \rangle$$

eine endliche Präsentation der Gruppe G. Dann gilt:

$$M(\mathcal{P})_{\mathrm{ab}} \in \mathrm{Mat}(n, m, \mathbb{Z}(G/[G,G])).$$

Durch den Isomorphismus der Ringe, können wir annehmen:

$$M(\mathcal{P})_{\mathrm{ab}} \in \mathrm{Mat}(n, m, \mathbb{Z}[t,t^{-1}]).$$

Definition 9.2.7. Jedes nichtnullsche Element f aus $\mathbb{Z}[t,t^{-1}]$ kann eindeutig in der Form $f = f_1 \cdot x^p$ geschrieben werden, wobei $f_1 = a_s t^s + a_{s-1} t^{s-1} + \cdots + a_0$ ein Polynom aus $\mathbb{Z}[t]$ mit $a_0 \neq 0$ ist und $p \in \mathbb{Z}$ ist. Diese Form heißt *kanonische Form* von f.

Definition 9.2.8. Seien f, g zwei nichtnullsche Elemente aus $\mathbb{Z}[t,t^{-1}]$. Wir schreiben sie in der kanonischen Form: $f = f_1/x^p$ und $g = g_1/x^q$ und setzen

$$ggT(f,g) := ggT(f_1, g_1).$$

Satz 9.2.9 Sei G eine endlich präsentierbare Gruppe mit $G/[G,G] \cong \mathbb{Z}$ und sei $\mathcal{P} = \langle x_1, \dots, x_n \,|\, r_1, \dots, r_m \rangle$ eine endliche Präsentation von G. Dann gilt $n - 1 \leqslant m$.

Definition 9.2.10. Sei G eine Gruppe mit $G/[G,G] \cong \mathbb{Z}$ und sei

$$\mathcal{P} = \langle x_1, \dots, x_n \,|\, r_1, \dots, r_m \rangle$$

eine endliche Präsentation von G. Das *Alexander-Polynom* von $\mathcal{P}$ ist ggT der Determinanten aller $(n-1) \times (n-1)$-Minoren aus

$$M(\mathcal{P})_{\mathrm{ab}} \in \mathrm{Mat}(n, m, \mathbb{Z}[t,t^{-1}]).$$

Das Alexander-Polynom von $\mathcal{P}$ wird als $AlexPol(\mathcal{P})$ bezeichnet.

Satz 9.2.11. Sei G eine Gruppe mit $G/[G,G] \cong \mathbb{Z}$ und seien

$$\mathcal{P}_1 = \langle x_1, \dots, x_n \,|\, r_1, \dots, r_m \rangle \text{ und } \mathcal{P}_2 = \langle y_1, \dots, y_n \,|\, s_1, \dots, s_\ell \rangle$$

zwei endliche Präsentationen von G. Dann gilt

$$AlexPol(\mathcal{P}_1) = AlexPol(\mathcal{P}_2).$$

Definition 9.2.12. Sei K ein Knoten und sei $\mathcal{P}$ eine endliche Präsentation seiner Fundamentalgruppe. Wir setzen $AlexPol(K) := AlexPol(\mathcal{P})$. Das Polynom heißt *Alexander-Polynom* von K. Das hängt nicht von der Wahl von $\mathcal{P}$ ab.

Satz 9.2.13. Äquivalente Knoten haben gleiche Alexander-Polynome.

10 Knoten (Teil II)

Definition 10.1. Sei G eine Gruppe mit $G/[G,G] \cong \mathbb{Z}$ und sei

$$\mathcal{P} = \langle x_1, \dots, x_n \,|\, r_1, \dots, r_m \rangle$$

eine endliche Präsentation von G. Für jede Zahl $1 \leqslant k \leqslant n-1$ definieren wir ein Polynom $\Delta_k \in \mathbb{Z}[t]$ und ein Ideal $E_k \subseteq \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$:

1) Δ_k ist der *ggT* der Determinanten aller $(n-k) \times (n-k)$-Minoren aus $M(\mathcal{P})_{\mathrm{ab}}$.

2) E_k ist ein Ideal in $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$, das von Determinanten aller $(n-k) \times (n-k)$-Minoren aus $M(\mathcal{P})_{\mathrm{ab}}$ erzeugt ist.

Wir definieren auch $\Delta_n := 1$ und $E_n := \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$.

Satz 10.2. Sei G eine endlich präsentierbare Gruppe mit $G/[G,G] \cong \mathbb{Z}$. Dann hängen Δ_k und E_k nicht von der Wahl einer endlichen Präsentation von G ab.

Definition 10.3. Das Polynom Δ_k heißt *k-tes Alexander-Polynom* von G. Das Ideal E_k heißt *k-tes elementares Ideal* von G.

Mit $\langle \Delta_k \rangle$ bezeichnen wir das Ideal in $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$, dass von Δ_k erzeugt ist.

Satz 10.4. Sei G eine endlich präsentierbare Gruppe mit $G/[G,G] \cong \mathbb{Z}$.
Dann gilt:

1) $\Delta_n |\, \Delta_{n-1} \,| \dots | \Delta_2 \,| \Delta_1$,

2) $E_1 \subseteq E_2 \subseteq \dots \subseteq E_n$,

3) $E_k \subseteq \langle \Delta_k \rangle$,

4) $E_1 = \langle \Delta_1 \rangle$, falls G die Fundamentalgruppe eines Knotens ist.

Satz 10.5. Die Knoten auf dem Bild 1 haben gleiche Alexander-Polynome Δ_1 und verschiedene Ideale E_2.

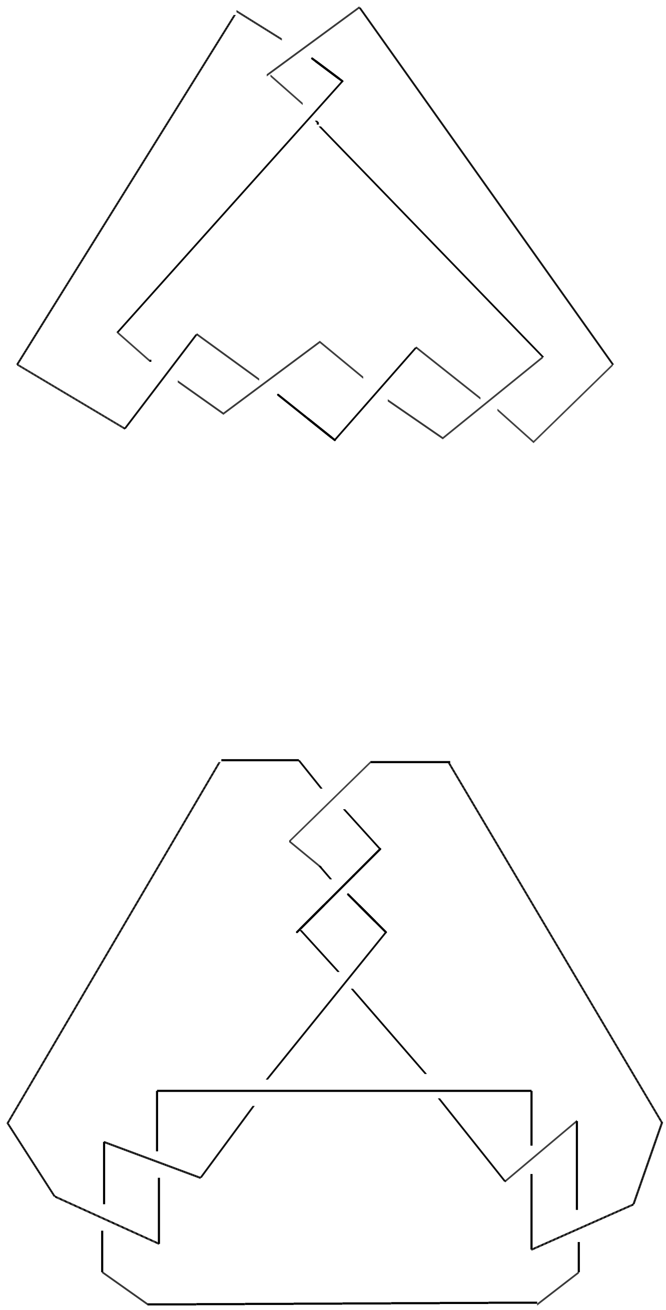

Bild 1.

11 Vorlesung
Burnside-Problem

Es gibt drei Variationen des Burnside-Problems: klassisch, schwach und eingeschränkt.

KLASSISCHES BURNSIDE-PROBLEM: Sei n eine natürliche Zahl und sei G eine endlich erzeugte Gruppe, so dass für alle $g \in G$ gilt: $g^n = 1$. Ist G endlich?

Die Antwort ist `positiv` für
$n = 2$ (leicht),
$n = 3$ (Levi und van der Waerden),
$n = 4$ (Sanow, 1940)
$n = 6$ (M. Hall, 1976).

Die Antwort ist `negativ` für
alle ungerade $n > 4381$ (P.S. Novikov und S.I. Adian, 1968)
alle ungerade $n > 665$ (S.I. Adian, 1975)

Das Problem für $n = 5$ und $n = 7, 8$ ist bis jetzt offen.

Satz (Ol'shanski, 1982). Sei p eine Primzahl größer als 10^{75}. Es existiert eine unendliche Gruppe G, so dass jede echte Untergruppe von G isomorph $\mathbb{Z}_p$ ist.

Diese Gruppe heißt Tarski-Monster.

SCHWACHES BURNSIDE-PROBLEM: Sei G endlich erzeugt und für alle $g \in G$ existiert $n(g) \in \mathbb{N}$, so dass $g^{n(g)} = 1$ ist. Ist G endlich?

Die Antwort ist `negativ` nach folgendem Satz:

Satz (Golod, 1964). Für jede Primzahl p existiert eine 2-erzeugte unendliche Gruppe G, so dass die Ordnungen der Elemente von G Potenzen von p sind.

Satz (Grigorchuk, Gupta-Sidki) Für jede ungerade Primzahl p existiert ein Baum X, so dass $\mathrm{Aut}(X)$ eine Untergruppe G enthält, für die folgendes gilt:

(1) G ist von 2 Elementen erzeugt.
(2) G ist eine p-Gruppe.
(3) G ist unendlich.

EINGESCHRÄNKTES BURNSIDE-PROBLEM: Seien $n, m \in \mathbb{N}$. Gibt es eine natürliche Zahl $f(n, m)$, so dass die Ordnung jeder endlichen m-erzeugten Gruppe mit dem Gesetz $g^n = 1$ nicht größer als $f(n, m)$ ist?

Die Antwort ist `positiv` (Zelmanov, Fields-Prämie 1994).

12 Vorlesung
Die Gruppe von Gupta-Sidki

Hier wurde die Konstruktion der Gruppe von Gupta-Sidki erklärt und der entsprechende Satz aus der Vorlesung 11 bewiesen.

13 Vorlesung
Der Umschreibungs-Prozess von Reidemeister-Schreier

Sei G eine Gruppe und G_1 eine Untergruppe von G. Es wird erklärt, wie man eine Präsentation von G_1 aus einer Präsentation von G ableiten kann.

Definition 13.1. Sei $F = F(X)$ eine freie Gruppe mit der Basis X und sei H eine Untergruppe von F. Eine Teilmenge $T \subseteq F$ heißt *Menge von Schreier-Repräsentanten der rechten Nebenklassen von H in F* (oder rechte *Schreier-Transversal von H in G*), falls:

1) $1 \in T$;
2) in jeder rechten Nebenklasse Hg gibt es genau ein Element aus T;
3) j edes Anfangssegment jedes Elements $t \in T$ wieder in T liegt:

wenn $t = x_1x_2 \dots x_n \in T$ mit $x_1, \dots, x_n \in X \cup X^{-1}$ ist, dann ist x_1, x_1x_2 , $x_1x_2x_3, \dots \in T$.

Bezeichnungen.

1) Für $g \in F$ sei $\overline{g}$ das Element von T mit $Hg = H\overline{g}$.
   Wir haben die folgenden Eigenschaften:
   a) $Hg_1 = Hg_2 \Leftrightarrow \overline{g_1} = \overline{g_2}$,
   b) $\overline{\overline{g}} = \overline{g}$,
   c) $\overline{\overline{g}f} = \overline{gf}$.
2) Für $t \in T$ und $x \in X \cup X^{-1}$ bezeichnen wir $\gamma(t, x) := tx\big(\overline{tx}\,\big)^{-1}$.
   Es ist klar, dass das Folgende gilt:
   a) $\gamma(t, x) \in H$;
   b) $\gamma(t, x^{-1}) = \gamma(\overline{tx^{-1}}, x)^{-1}$.

Satz 13.2. Sei $F = F(X)$ eine freie Gruppe, sei $H \leqslant F$ und sei T eine Menge von Schreier-Repräsentanten der rechten Nebenklassen von H in F. Dann gilt:

1) Jedes Element $h \in H$ kann als ein Produkt von Elementen der Form $\gamma(t, x)$ dargestellt werden: Wenn

$$h = \ x_1x_2 \dots x_n \ \text{ mit } \ x_i \in X \cup X^{-1} \ \text{ ist, dann ist}$$
$$h = \ \gamma(1, x_1) \cdot \gamma(\overline{x_1}, x_2) \cdot \gamma(\overline{x_1x_2}, x_3) \cdot \ldots \cdot \gamma(\overline{x_1x_2 \dots x_{n-1}}, x_n).$$

2) H ist eine freie Gruppe mit der Basis

$$Y := \{\gamma(t, x) \,|\, t \in T, x \in X,\ \gamma(t, x) \neq 1\}.$$

Bezeichnung. Nach dem Satz kann jedes $h \in H$ eindeutig als gekürztes Wort in dem Alphabet $Y \cup Y^{-1}$ geschrieben werden. Das Wort wird mit $\tau(h)$ bezeichnet.

Satz 13.3. Sei G eine Gruppe mit der Präsentation $\langle X \,|\, R\rangle$ und G_1 eine Untergruppe von G. Sei $\varphi : F(X) \to G$ der kanonische Epimorphismus und $H = \varphi^{-1}(G_1)$ das volle Urbild von G_1 in $F(X)$ bezüglich φ. Sei T eine Menge von Schreier-Repräsentanten der rechten Nebenklassen von H in $F(X)$. Dann hat G_1 die Präsentation

$$\langle Y \,|\, S\rangle,$$

wobei Y im Satz 13.2 definiert ist und $S := \{\tau(trt^{-1}) \,|\, t \in T, r \in R\}$ ist.

Korollar 13.4. Jede Untergruppe von endlichem Index in einer endlich präsentierbaren (endlich erzeugten) Gruppe ist endlich präsentierbar (endlich erzeugt).

Beispiel. Sei G eine Gruppe mit der Präsentation $\langle a, b \,|\, a^2 = b^3 \rangle$. Sei G_1 der Kern des Homomorphismus $\theta : G \to S_3$, $a \mapsto (12)$, $b \mapsto (123)$. Wir werden eine Präsentation von G_1 finden.

Dafür betrachten wir den kanonischen Homomorphismus $\varphi : F(a, b) \to G$. Sei $H = \varphi^{-1}(G_1)$. Dann ist $T = \{1, b, b^2, a, ab, ab^2\}$ die Menge von Schreier-Repräsentanten der rechten Nebenklassen von H in $F(a, v)$.

Zuerst berechnen wir alle $\gamma(t, x)$ mit $t \in T$ und $x \in X = \{a, b\}$:

$$
\begin{aligned}
& 1 \cdot a \cdot (\overline{a})^{-1} = 1, & & 1 \cdot b \cdot (\overline{b})^{-1} = 1, \\
x = \; & b \cdot a \cdot (\overline{ba})^{-1} = bab^{-2}a^{-1}, & & b \cdot b \cdot (\overline{b^2})^{-1} = 1, \\
y = \; & b^2 \cdot a \cdot (\overline{b^2 a})^{-1} = b^2 ab^{-1}a^{-1}, & w = \; & b^2 \cdot b \cdot (\overline{b^3})^{-1} = b^3, \\
z = \; & a \cdot a \cdot (\overline{a^2})^{-1} = a^2, & & a \cdot b \cdot (\overline{ab})^{-1} = 1, \\
u = \; & ab \cdot a \cdot (\overline{aba})^{-1} = abab^{-2}, & & ab \cdot b \cdot (\overline{ab^2})^{-1} = 1, \\
v = \; & ab^2 \cdot a \cdot (\overline{ab^2 a})^{-1} = ab^2ab^{-1}, & s = \; & ab^2 \cdot b \cdot (\overline{ab^3})^{-1} = ab^3a^{-1}.
\end{aligned}
$$

Dann ist $Y = \{x, y, z, u, v, w, s\}$ das Erzeugersystem von G_1. Um die Relationen S zu berechnen, müssen wir die Wörter trt^{-1}, wobei $t \in T$ und $r = b^3 a^{-2}$ ist, in dem Alphabet Y umschreiben. Machen wir das nach Satz 13. 2, dann erhalten wir

$$
\begin{array}{lll}
r = wz^{-1}, & brb^{-1} = wv^{-1}x^{-1}, & b^2rb^{-2} = wu^{-1}y^{-1}, \\
ara^{-1} = sz^{-1}, & (ab)r(ab)^{-1} = sy^{-1}u^{-1}, & (ab^2)r(ab^2)^{-1} = sx^{-1}v^{-1}.
\end{array}
$$

Schließlich eliminieren wir w, v, u, s und ersetzen sie in allen dieser Relationen durch $z, x^{-1}z, y^{-1}z, z$. Als Resultat bekommen wir die folgende Repräsentation von G_1:

$$\langle x, y, z \,|\, yz = zy,\; xz = zx \rangle.$$

Daraus leiten wir ab:

$$G_1 \cong \mathbb{Z} \times F_2.$$

14 Vorlesung Todd–Coxeter–Methode

Definition 14.1. Sei G eine Gruppe und X ein Erzeugersystem von G. Wir definieren der *Cayley Graph* $\mathrm{Cal}(G, X)$ von G bezüglich X: seine Eckpunkte sind Elemente g von G. Für jeden Eckpunkt g und jeden Erzeuger $x \in X$ gibt es eine gerichtete Kante von g zu gx mit der Markierung x.

Definition 14.2. Sei G eine Gruppe und X ein Erzeugersystem von G. Sei H eine Untergruppe von G. Wir definieren den *Schreier Graph* $\Gamma(H, G, X)$ von rechten Nebenklassen von H in G bezüglich X: seine Eckpunkte sind rechte Nebenklassen Hg, $g \in G$.

Für jeden Eckpunkt Hg und jeden Erzeuger $x \in X$ gibt es eine gerichtete Kante von Hg zu Hgx mit der Markierung x.

Bemerkung. $\mathrm{Cal}(G, X) = \Gamma(H, G, X)$.

Aufgabe. Malen Sie den Graph $\mathrm{Cal}(S_3, X)$, wobei $X = \{(12), (123)\}$ ist.

Definition 14.3. Sei G eine Gruppe mit der Präsentation $\langle x_1, \dots, x_n \,|\, r_1, \dots, r_m \rangle$, sei G_1 eine Untergruppe von G, und seien $w_1(x_1, \dots, x_n), \dots, w_k(x_1, \dots, x_n)$ Erzeuger von G_1. Wenn der Index $|G : G_1|$ endlich ist, dann kann man folgende Datei mit Hilfe der Todd–Coxeter–Methode berechnen:

1) der Index von G_1 in G;
2) der Cayley-Graph von G bezüglich G_1;
3) ein rechtes Schreier-Transversal für $\varphi^{-1}(G_1)$ in $F(x_1, \dots, x_n)$, wobei

$$\varphi : F(x_1, \dots, x_n) \to G$$

der kanonische Homomorphismus ist;

4) eine Präsentation von G_1.

14.4. Beispiel. 1) Seien $G = \langle x, y \,|\, x^4, y^3, (xy)^2 \rangle$ und $G_1 = \langle x \rangle \leqslant G$. Daraus kann man konsequent die folgende Information bekommen: $|G : G_1| = 6$, $|x| = 4$, $|G| = 24$, $G \cong S_4$.

2) Seien $F(2, 5) = \langle x, a, b, c, d \,|\, xa = b, ab = c, bc = d, cd = x, dx = a \rangle$ und $G_1 = \langle x \rangle \leqslant G$. Dann ist $|G : G_1| = 1$ und $F(2, 5) \cong \mathbb{Z}_{11}$.

15 Vorlesung Freie Produkte und amalgamierte Produkte

Definition 15.1. Seien G_1 und G_2 zwei Gruppen. Ein formales Produkt $x_1 x_2 \dots x_n$ mit $x_1, \dots, x_n \in G_1 \cup G_2$, $n \geqslant 1$ heißt *alternierend*, falls:
1) alle x_i ungleich 1 sind,
2) die benachbarten Faktoren x_i, x_{i+1} nicht in derselben Gruppe G_j liegen.

Das *freie Produkt* $G_1 * G_2$ ist die Menge aller formalen alternierenden Produkte $x_1 x_2 \dots x_n$, $n \geqslant 1$, zusammen mit 1, bezüglich der natürlichen Multiplikation.

Etwas ausführlicher: Seien $x = g_1 \dots g_n$, $y = h_1 \dots h_m$, $n, m \geqslant 1$ zwei alternierende Produkte. Dann wird ihr Produkt induktiv definiert:

$$x \cdot y = \begin{cases} g_1 \dots g_n h_1 \dots h_m, & \text{falls } g_n \in G_1, h_1 \in G_2 \text{ oder } g_n \in G_2, h_1 \in G_1, \\ g_1 \dots g_{n-1} z h_2 \dots h_m, & \text{falls } g_n, h_1 \in G_1 \text{ oder } g_n, h_1 \in G_2 \text{ und } z := g_n h_1 \neq 1, \\ g_1 \dots g_{n-1} \cdot h_2 \dots h_m, & \text{falls } g_n, h_1 \in G_1 \text{ oder } g_n, h_1 \in G_2 \text{ und } g_n h_1 = 1. \end{cases}$$

Behauptung 15.2. Seien G_1, G_2 zwei Untergruppen einer Gruppe G. Wenn jedes Element $1 \neq g \in G$ eindeutig als alternierendes Produkt $g = g_1 g_2 \dots g_n$ geschrieben werden kann, dann ist $G \cong G_1 * G_2$.

Beispiel. Sei Γ ein Graph mit $\Gamma^0 = \mathbb{Z}$ und mit Kanten zwischen z und $z+1$ für $z \in \mathbb{Z}$. Sei a die Spiegelung von Γ um 0 und sei b die Spiegelung von Γ um 1. Wir betrachten die Gruppe $\langle a, b \rangle$ erzeugte von a, b in $\mathrm{Aut}(\Gamma)$. Dann ist $\langle a, b \rangle \cong \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$.

Satz 15.3.
1) Die Gruppen G_1 und G_2 sind in das freie Produkt $G_1 * G_2$ eingebettet.
2) Wenn G_i $(i = 1, 2)$ die Präsentationen $\langle X_i \mid R_i \rangle$ haben, dann hat $G_1 * G_2$ die Präsentation $\langle X_1 \cup X_2 \mid R_1 \cup R_2 \rangle$.

Definition 15.4. Seien G_1 und G_2 zwei Gruppen und seien $A \leqslant G_1$ und $B \leqslant G_2$ zwei isomorphe Untergruppen. Sei $\varphi : A \to B$ ein Isomorphismus. Das *amalgamierte Produkt* von G_1 und G_2 bezüglich $\varphi : A \to B$ ist die Faktorgruppe von

$$G_1 * G_2$$

duch den normalen Abschlusses der Menge $\{\varphi(a)a^{-1} \mid a \in A\}$ und wird als

$$G_1 \underset{A=B}{*} G_2$$

bezeichnet.

Beobachtung. Wenn G_i $(i = 1, 2)$ die Präsentationen $\langle X_i \mid R_i \rangle$ haben, dann hat $G_1 \underset{A=B}{*} G_2$ die Präsentation

$$\langle X_1 \cup X_2 \mid R_1 \cup R_2, a = \varphi(a)\,(a \in A)\rangle.$$

Definition 15.5. Seien G_1, G_2, A, B und φ wie in Definition 15.4. Seien

- T_A eine Menge von Repräsentanten der rechten Nebenklassen von A in G_1, so dass der Repräsentant von A gleich 1 ist,
- T_B eine Menge von Repräsentanten der rechten Nebenklassen von B in G_2, so dass der Repräsentant von B gleich 1 ist.

Eine A-*Normalform* (bezüglich T_A und T_B) ist eine Folge $(x_0, x_1, \dots, x_n)$, wobei gilt:
1) $x_0 \in A$,
2) $x_i \in T_A \setminus \{1\}$ oder $x_i \in T_B \setminus \{1\}$ und die benachbarten x_i, x_{i+1} liegen in verschiedenen T_A, T_B.

Analog kann man B-Normalform definieren.

Satz 15.6. Sei $G = G_1 \underset{A=B}{*} G_2$ und seien T_A und T_B wie in Definition 15.5. Dann gilt:

1) Jedes Element $g \in G$ kann eindeutig in der Form $g = x_0 x_1 \dots x_n$ geschrieben werden, wobei $(x_0, x_1, \dots, x_n)$ eine A-Normalform ist.
2) Die Gruppen G_1 und G_2 sind in das amalgamierte Produkt $G_1 \underset{A=B}{*} G_2$ eingebettet.

Beispiel. Sei $G_1 = \langle a \mid a^{12} = 1 \rangle$ und $G_2 = \langle b \mid b^{15} = 1 \rangle$. Sei $A = \langle a^4 \rangle \leqslant G_1$ und $B = \langle b^5 \rangle \leqslant G_2$. Wir betrachten den Isomorphismus $\varphi : A \to B,\ a^4 \to b^5$. Dann hat die Gruppe $G = G_1 \underset{A=B}{*} G_2$ die Präsentation

$$\langle a, b \mid a^{12} = 1, b^{15} = 1, a^4 = b^5 \rangle.$$

Wir setzen $T_A := \{1, a, a^2, a^3\}$ und $T_B := \{1, b, b^2, b^3, b^4\}$. Jetzt schreiben wir das Element $a^3ba^5 \in G$ in der Form, die im Satz 15.6.1) definiert wurde:

$$a^3ba^5 = a^3ba^4 \cdot a = a^3b^6a = a^3b^5 \cdot ba = a^7ba = a^4 \cdot a^3ba.$$

16 Vorlesung HNN-Erweiterung

Definition 16.1. Sei $G = \langle X \mid R \rangle$ eine Gruppe und seien A, B zwei isomorphe Untergruppen von G. Sei $\varphi : A \to B$ ein Isomorphismus. Die *HNN-Erweiterung* von G bezüglich A, B, φ ist die Gruppe

$$G^* := \langle X, t \mid R,\, t^{-1}at = \varphi(a)\,(a \in A) \rangle.$$

Definition 16.2. Seien G, A, B und φ wie in Definition 16.1. Seien
- T_A eine Menge von Repräsentanten der rechten Nebenklassen von A in G, so dass der Repräsentant von A gleich 1 ist,
- T_B eine Menge von Repräsentanten der rechten Nebenklassen von B in G, so dass der Repräsentant von B gleich 1 ist.

Eine *Normalform* (bezüglich T_A und T_B) ist eine Folge $(g_0, t^{\varepsilon_1}, g_1, \dots, t^{\varepsilon_n}, g_n)$, wobei gilt:
1) $g_0, g_1, \dots, g_n \in G$, $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in \{-1, 1\}$,
2) $\varepsilon_i = -1 \Rightarrow g_i \in T_A$,
3) $\varepsilon_i = 1 \Rightarrow g_i \in T_B$,
4) es gibt keine Teilfolge $(t^\varepsilon, 1, t^\varepsilon)$.

Satz 16.3. Sei G^* die HNN-Erweiterung aus der Definition 16.1 und seien T_A, T_B die Mengen von Repräsentanten aus der Definition 16.2. Dann gilt:
1) Jedes Element $x \in G^*$ kann eindeutig in der Form $x = g_0 t^{\varepsilon_1} g_1 \dots t^{\varepsilon_n} g_n$ geschrieben werden, wobei die Folge $(g_0, t^{\varepsilon_1}, g_1, \dots, t^{\varepsilon_n}, g_n)$ eine Normalform (bezüglich T_A, T_B) ist.
2) Die Gruppe G ist in die Gruppe G^* eingebettet.
3) Sei $x = z_0 t^{\varepsilon_1} z_1 \dots t^{\varepsilon_n} z_n \in G^*$, wobei gilt:
   a) $n \geqslant 1$, $z_0, z_1, \dots, z_n \in G$ und $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in \{-1, 1\}$,
   b) x hat keine Unterwörter $t^{-1} z_i t$ mit $z_i \in A$,
   c) x hat keine Unterwörter $t z_i t^{-1}$ mit $z_i \in B$.

Dann ist $x \neq 1$.

Beispiel. Sei $G = F(a, b)$, $A = \langle a^2 \rangle$ und $B = \langle b^3 \rangle$. Dann ist $G^* = \langle a, b, t \mid t^{-1}a^2 t = b^3 \rangle$. Wir sezten

$$T_A := \{w, aw \mid l \in \mathbb{Z} \setminus \{0\},\ w \text{ ist ein Wort in } G, \text{ das nicht mit } a^{\pm 1} \text{ anfängt}\},$$
$$T_B = \{w, bw, b^2w \mid l \in \mathbb{Z} \setminus \{0\},\ w \text{ ist ein Wort in } G, \text{ das nicht mit } b^{\pm 1} \text{ anfängt}\}.$$

Jetzt schreiben wir das Element $x = b^2 t^{-1} a^{-4} t b^5 ab t^{-1} a^4 b^3 a \in G$ in der Form, die im Satz 16.3.1) definiert wurde:

$$x = b^2 t^{-1} a^{-4} t b^5 ab \cdot b^6 t^{-1} b^3 a = b^2 t^{-1} a^{-4} \cdot a^2 t b^2 a b^7 t^{-1} b^3 a = bab^7 t^{-1} b^3 a.$$

17 Vorlesung
Residuell endliche Gruppen

Definition 17.1. Eine Gruppe G heißt *residuell endlich*, falls für jedes Element $1 \neq g \in G$ ein Homomorphismus $\varphi : G \to \overline{G}$ existiert, so dass $\overline{G}$ endlich und $\varphi(g) \neq 1$ ist.

Lemma 17.2. (Poincaré) Sei H eine Untergruppe von G mit einem endlichen Index k. Dann existiert eine Untergruppe H_1 in G, so dass das Folgende gilt:
1) $H_1 \leqslant H$,
2) $H_1 \trianglelefteq G$,
3) der Index von H_1 in G ist ein Teiler von $k!$

Satz 17.3. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:
1) G ist residuell endlich;
2) Der Schnitt aller normalen Untergruppen endlichen Indexes in G ist 1:

$$\bigcap_{\substack{N \trianglelefteq G \\ |G:N|<\infty}} N = 1.$$

3) Der Schnitt aller Untergruppen endlichen Indexes in G ist 1:

$$\bigcap_{\substack{H \leqslant G \\ |G:H|<\infty}} H = 1.$$

Satz 17.4. Die folgenden Gruppen sind residuell endlich:
1) $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}$,
2) $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$,
3) jede freie Gruppe.

Bemerkung. Mal'cev hat bewiesen: Sei K ein Körper. Dann ist die Gruppe $\mathrm{GL}_n(K)$ residuell endlich.

Satz 17.5. Jede Untergruppe einer residuell endlichen Gruppe ist residuell endlich.

Definition 17.6. Sei $n, m \in \mathbb{Z}$. *Baumslag-Solitar* Gruppe $\mathrm{BS}(n, m)$ ist die Gruppe mit der Präsentation

$$\langle a, b \,|\, b^{-1}a^n b = a^m \rangle.$$

Satz 17.7. Seien n, m zwei teilerfremde Zahlen aus $\mathbb{Z} \setminus \{0, 1, -1\}$. Dann gilt:
1) Es existiert ein surjektiver Homomorphismus $\varphi : \mathrm{BS}(n, m) \twoheadrightarrow \mathrm{BS}(n, m)$ mit $\mathrm{Ker}(\varphi) \neq 1$.
2) Die Baumslag-Solitar Gruppe $\mathrm{BS}(n, m)$ ist nicht residuell endlich.

18 Vorlesung
Freiheitssatz von Magnus

Definition 18.1. Sei X ein Alphabet. Ein Wort r in dem Alphabet $X^{\pm}$ heißt *zyklisch reduziert*, falls

1) r reduziert ist,
2) der erste und der letzte Buchstabe von r nicht zueinander invers sind.

Definition 18.2. Eine Gruppe G heißt *Gruppe mit einer Relation*, falls G eine Präsentation $\langle X \,|\, R\rangle$ besitzt, wobei R aus einem Wort besteht.

Satz 18.3. (Freiheitssatz) Sei G eine Gruppe mit der Präsentation $\langle x_1, x_2, \dots \,|\, r\rangle$, wobei r ein Wort in Buchstaben aus dem Alphabet $X^{\pm} = \{x_1, x_2, \dots\}^{\pm}$ ist. Wir nehmen an, dass r zyklisch reduziert ist.

Sei x_0 ein Buchstabe von r. Dann ist die Untergruppe $\langle X \setminus \{x_0\}\rangle$ von G frei mit der Basis $X \setminus \{x_0\}$.

19 Vorlesung
Hyperbolische Ebene und $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$

Definition 19.1. Das Modell der hyperbolischen Ebene von Poincaré ist die Menge

$$\mathbb{H}^2 := \{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Im}(z) > 0\}.$$

mit der Metrik, die durch die folgende Formel aus der differenziellen Geometrie gegeben ist:

$$(ds)^2 = \frac{(dx)^2 + (dy)^2}{y^2}.$$

Das heißt, dass die Länge einer differenzierbaren Kurve

$$t \mapsto (x(t), y(t)),$$

wobei $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$ ist, mit der folgenden Formel berechnet wird:

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\sqrt{(\frac{dx}{dt})^2 + (\frac{dy}{dt})^2}}{y}\, dt$$

Man kann beweisen, dass unendliche Geodäten in $\mathbb{H}^2$ die folgenden Mengen G_a und $G_{a,r}$ sind, wobei $a \in \mathbb{R}$ und $r \in \mathbb{R}_+$ ist:

1) $G_a \ := \{z = a + ib \,|\, b > 0\}$.
2) $G_{a,r} := \{z = a + re^{i\varphi} \,|\, 0 < \varphi < \pi\}$.

Wir werden diese Mengen *Geraden* in der hyperbolischen Ebene nennen. Wenn wir die Menge $\mathbb{H}^2$ mit der "oberen" euklidschen Halbebene identifizieren, dann sind diese Geraden offene Achsen und offene Halbkreise, deren Abschlüsse die reelle Achse senkrecht berühren.

Definition 19.2. Eine Gruppe G *operiert* auf einer Menge X, falls für jedes Element $g \in G$ und jeden Punkt $x \in X$ ein Element $g{\cdot}x \in X$ definiert ist, so dass

1) $g_1{\cdot}(g_2{\cdot}x) = (g_1 g_2){\cdot}x$,
2) $e{\cdot}x = x$

für alle $g_1, g_2 \in G$ und $x \in X$ gilt.

Die Untergruppe $\{g \in G \mid g{\cdot}x = x \;\; \forall x \in X\}$ von G heißt *Kern* dieser Operierung.

Für $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ und $z \in \mathbb{H}^2$ definieren wir

$$A{\cdot}z := \frac{az+b}{cz+d}.$$

Satz 19.3.
1) Für jede Matrix $A \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ und jeden Punkt $z \in \mathbb{H}^2$ ist $A{\cdot}z \in \mathbb{H}^2$.
2) Die Gruppe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ operiert auf $\mathbb{H}^2$ mit dem Kern $\{\pm E\}$.

Definition 19.4. Für jede Matrix $A \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ heißt die Abbildung

$$\begin{aligned} \varphi_A : \;\; & \mathbb{H}^2 \to \mathbb{H}^2, \\ & z \mapsto A{\cdot}z \end{aligned}$$

Möbiustransformation von $\mathbb{H}^2$.

Wir erinnern uns, dass $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) \cong \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})/\{\pm E\}$ ist.

Satz 19.5.

1) Jede Möbius-Transformation von $\mathbb{H}^2$ ist eine Isometrie von $\mathbb{H}^2$.
2) Sei $\mathrm{Isom}_+(\mathbb{H}^2)$ die Gruppe der orientierungserhaltenen Isometrien von $\mathbb{H}^2$. Dann gilt
$$\mathrm{Isom}_+(\mathbb{H}^2) \cong \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}).$$

Definition 19.6. Sei G eine Gruppe, die auf einem topologischen Raum X operiert. Eine Teilmenge M in X heißt *Fundamenalbereich* für die Operierung, falls das Folgende gilt:

1) Jeder Punkt von X ist einem der Punkte von M G-äquivalent:

$$\forall x \in X \quad \exists \; g \in G \; \text{ mit } \; g{\cdot}z \in M.$$

2) Verschiedene Punkte von X sind nicht G-äquivalent:

$$\forall x \neq y \in X \quad \nexists \; g \in G \; \text{ mit } \; g{\cdot}x = y.$$

Bemerkung. Man kann 1) umformulieren:

$$X = \bigcup_{g \in G} gM.$$

Satz 19.7. Die Menge

$$M = \{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z|,\ -1/2 < \mathrm{Re}(z) \leqslant 1/2\} \bigcup \{e^{i\alpha} \mid \pi/3 \leqslant \alpha \leqslant \pi/2\}.$$

ist der Fundamentalbereich für die Operierung der Gruppe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ auf der hyperbolischen Ebene $\mathbb{H}^2$.

20 Vorlesung Higman-Gruppe

Lemma 20.1. Sei $n \geqslant 2$ eine natürliche Zahl. Sei p der minimale Primteiler von n und sei q der minimale Primteiler von $2^n - 1$. Dann ist $p < q$.

Satz 20.2. (Higman) Die Gruppe

$$\begin{aligned} G_4 = \quad \langle a_1, a_2, a_3, a_4 \mid \quad & a_1^{-1} a_2 a_1 = a_2^2, \\ & a_2^{-1} a_3 a_2 = a_3^2, \\ & a_3^{-1} a_4 a_3 = a_4^2, \\ & a_3^{-1} a_4 a_3 = a_4^2 \rangle \end{aligned}$$

ist unendlich und ohne nichttriviale endliche Faktorgruppen.

Satz 20.3. (Neumann) Jede endlich erzeugte Gruppe hat eine maximale normale Untergruppe.

Folgerung 20.4. (Higman) Es existiert eine endlich erzeugte unendliche einfache Gruppe.

Bemerkung. Es existiert eine endlich präsentierte unendliche einfache Gruppe.

21 Vorlesung Die Gruppe $\mathrm{PSL}_n(K)$

Definition 21.1. Das Zentrum einer Gruppe G ist die folgende Untergruppe von G:

$$Z(G) := \{x \in G \mid gx = xg \text{ für alle } g \in G\}.$$

Definition 21.2. Sei K ein Körper und sei $n \in \mathbb{N}$. Wir definieren die folgenden Gruppen:

$$\begin{aligned} \mathrm{GL}_n(K) \quad & := \{A \in \mathrm{Mat}(n,n,K) \mid \det(A) \neq 0\}, \\ \mathrm{SL}_n(K) \quad & := \{A \in \mathrm{Mat}(n,n,K) \mid \det(A) = 1\}, \\ \mathrm{PSL}_n(K) \quad & := \mathrm{SL}_n(K)/Z(\mathrm{SL}_n(K)). \end{aligned}$$

Die letzte Gruppe heißt *projektive speziale lineare* Gruppe des Grades n über K. Wenn K ein endlicher Körper der Größe q ist, schreibt man $\mathrm{PSL}_n(q)$ statt $\mathrm{PSL}_n(K)$ u.s.w.

Bemerkung. Sei K ein Körper und sei $n \in \mathbb{N}$. Die Gruppe $Z(\mathrm{SL}_n(K))$ besteht aus allen skalaren Matrizen von $\mathrm{SL}_n(K)$.

Satz 21.3. Es gilt

$$\begin{aligned}
|\mathrm{GL}_n(q)| &= \textstyle\prod_{i=0}^{n-1}(q^n - q^i),\\
|\mathrm{SL}_n(q)| &= \tfrac{1}{q-1} \cdot |\mathrm{GL}_n(q)|,\\
|Z(\mathrm{SL}_n(q))| &= \mathrm{ggT}\ (n, q-1),\\
|\mathrm{PSL}_n(q)| &= \tfrac{1}{\mathrm{ggT}\ (n,q-1)} \cdot |\mathrm{SL}_n(q)|.
\end{aligned}$$

Folgerung 21.4. Es gilt

$$|\mathrm{PSL}_n(q)| = \frac{1}{(q-1)\cdot \mathrm{ggT}\ (n, q-1)} \cdot \prod_{i=0}^{n-1}(q^n - q^i).$$

Satz 21.5. Es gilt $\mathrm{PSL}_2(4) \cong A_5$.

Satz 21.6. (Jordan – Dickson) Sei K ein Körper und sei $n \in \mathbb{N}$. Dann ist die Gruppe $\mathrm{PSL}_n(K)$ einfach mit Ausnahmen $\mathrm{PSL}_2(2)$ und $\mathrm{PSL}_2(3)$.

22 Vorlesung Semidirektes Produkt, Kartesisches Produkt und Direktes Produkt, Kartesisches Kranzprodukt und Direktes Kranzprodukt

Definition 22.1. Seien A, B Untergruppen von G. Die Gruppe G heißt *semidirektes Produkt* von A und B, falls die folgenden Bedingungen erfüllt sind:
1) $A \trianglelefteq G$,
2) $A \cap B = 1$,
3) $G = AB$.

In dem Fall schreib t man $G = A \rtimes B$.

Beispiele.
1) Es gilt $S_3 \cong A \rtimes B$, wobei $A = \{id, (123), (132)\}$, $B = \{id, (12)\}$ ist.

2) Seien

$$G = \quad \{\begin{pmatrix} a & b & x \\ c & d & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \,|\, a,b,c,d,x,y \in \mathbb{Z}, ad-bc=1\},$$

$$A = \quad \{\begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \,|\, x,y \in \mathbb{Z}\},$$

$$B = \quad \{\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \,|\, a,b,c,d \in \mathbb{Z}, ad-bc=1\}.$$

Dann ist $G = A \rtimes B$. Merken wir an, dass $A \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ und $B \cong \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ ist.

Definition 22.2. Sei I eine Menge und seien G_α, $\alpha \in I$, Gruppen.
a) Die Menge der Funktionen

$$\overline{\prod_{\alpha\in I}} G_\alpha := \{f : I \to \underset{\alpha\in I}{\cup} G_\alpha \,|\, f(\alpha) \in G_\alpha \text{ für alle } \alpha \in I\}$$

mit der Multiplikation, die durch $fg(\alpha) := f(\alpha)g(\alpha)$, $\alpha \in I$, definiert ist, bildet eine Gruppe. Diese Gruppe heißt *kartesisches Produkt* von G_α, $\alpha \in I$.

Das identische Element dieser Gruppe ist die Funktion id, so dass $id(\alpha) = e$ für alle $\alpha \in I$ ist.

b) Die Menge

$$\mathrm{supp}(f) := \{\alpha \in I \,|\, f(\alpha) \neq e\}$$

heißt *Träger* der Funktion f.

c) Die Teilmenge

$$\prod_{\alpha\in I} G_\alpha := \{f \in \overline{\prod_{\alpha\in I}} G_\alpha \,|\, |\mathrm{supp}(f)| < \infty\}$$

mit der oben definierten Multiplikation bildet eine Gruppe. Diese Gruppe heißt *direktes Produkt* von G_α, $\alpha \in I$. Wir haben

$$\prod_{\alpha\in I} G_\alpha \leqslant \overline{\prod_{\alpha\in I}} G_\alpha.$$

Definition 22.3. Seien A, B Gruppen. Wir definieren

$$\mathrm{Fun}(B,A) := \{f : B \to A \,|\, f \text{ ist eine Funktion}\}$$

und

$$\mathrm{fun}(B,A) := \{f : B \to A \,|\, \mathrm{supp}(f) < \infty\}.$$

Es ist klar, dass

$$\mathrm{Fun}(B,A) = \overline{\prod_{\alpha\in B}} A_\alpha \quad \text{und} \quad \mathrm{fun}(B,A) = \prod_{\alpha\in B} A_\alpha$$

gilt, wobei $A_\alpha := A$ für alle $\alpha \in B$ ist.

Definition 22.4.
a) Für $f \in \mathrm{Fun}(B, A)$ und $b \in B$ definieren wir die Funktion $f^b \in \mathrm{Fun}(B, A)$ durch

$$f^b(x) = f(bx), \ \ x \in B.$$

b) Die Menge

$$A \,\bar{\wr}\, B := \{bf \mid b \in B, f \in \mathrm{Fun}(B, A)\}$$

mit der Multiplikation

$$bf \cdot b'f' := bb'f^{b'}f'$$

bildet eine Gruppe. Diese Gruppe heißt *kartesisches Kranzprodukt*.
c) Die Menge

$$A \wr B := \{bf \mid b \in B, f \in \mathrm{fun}(B, A)\}$$

mit der in b) definierten Multiplikation bildet eine Gruppe. Diese Gruppe heißt *direktes Kranzprodukt*.

Das folgende ist klar:
(i) $A \wr B \leqslant A \,\bar{\wr}\, B$,

(ii) $A \wr B = A \,\bar{\wr}\, B$ gilt genau dann, wenn B endlich ist.

(iii) $|A \,\bar{\wr}\, B| = |B| \cdot |A|^{|B|}$,

Struktur des Kranzproduktes.
Wir definieren zwei natürliche Abbildungen:

$$\begin{aligned} i : B &\to A \,\bar{\wr}\, B, \quad b \mapsto b\,id, \\ j : \mathrm{Fun}(B, A) &\to A \,\bar{\wr}\, B, \quad f \mapsto ef. \end{aligned}$$

Die Bilder dieser Abbildungen werden durch B' und $\mathrm{Fun}(B, A)'$ bezeichnet. Wir setzen auch $\mathrm{fun}(B, A)' := j(\mathrm{fun}(B, A))$. Es ist klar, dass $B \cong B'$, $\mathrm{Fun}(B, A) \cong \mathrm{Fun}(B, A)'$ und $\mathrm{fun}(B, A) \cong \mathrm{fun}(B, A)'$ ist.

Satz 22.5. Es gilt:
a) $A \,\bar{\wr}\, B = \mathrm{Fun}(B, A)' \rtimes B'$,
b) $A \wr B = \mathrm{fun}(B, A)' \rtimes B'$.

23 Vorlesung Kranzprodukte und Erweiterungen von Gruppen

Definition 23.1. Seien K und H Gruppen. Eine Gruppe G heißt *Erweiterung* von K mit Hilfe von H, falls G eine Untergruppe A besitzt, so dass $A \trianglelefteq G$, $A \cong K$ und $G/A \cong H$ gilt.

Definition 23.2. Die *Diedergruppe* D_n ist die Symmetriegruppe eines regularen n-Ecks in der Ebene.

Die Gruppe D_n enthält $2n$ Elemente: n Rotationen und n Spiegelungen. Sie hat die folgende Präsentation:

$$\langle r, s \mid r^n = s^2 = 1,\ s^{-1}rs = r^{-1} \rangle.$$

Beispiele.

1) $\mathbb{Z}_6$ und S_3 sind Erweiterungen von $\mathbb{Z}_3$ mit Hilfe von $\mathbb{Z}_2$.

2) Die Quaternionen-Gruppe $Quat := \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ und die Diedergruppe D_4 sind Erweiterungen von $\mathbb{Z}_2$ mit Hilfe von $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

Definition 23.3. Eine *Einbettung* ist ein injektiver Homomorphismus.

Satz 23.4. (Frobenius) Jede Erweiterung von K mit Hilfe von H kann in das Kranzprodukt $K \bar{\wr} H$ eingebettet werden.

24 Vorlesung Darstellungstheorie

Sei V ein Vektorraum über einem Körper K. Ein *Automorphismus* von V ist eine lineare bijektive Abbildung von V nach V. Die Gruppe aller Automorphismen von V über K wird mit $\mathrm{Aut}_K(V)$ bezeichnet. Wir haben $\mathrm{Aut}_K(V) \cong \mathrm{GL}_n(K)$, falls $n = \dim(V)$ ist.

Satz 24.1. Sei I ein Ikosaheder in $\mathbb{R}^3$ und sei $\mathrm{Sym}^+(I)$ die Gruppe der orientierungserhaltenden Automorphismen von $\mathbb{R}^3$, die I auf I abbilden. Dann ist $\mathrm{Sym}^+(I) \cong A_5$.

Definition 24.2.

a) Eine *lineare Darstellung* einer Gruppe G ist ein Homomorphismus $\rho : G \to \mathrm{Aut}_K(V)$, wobei V ein Vektorraum über K ist.

b) Eine lineare Darstellung $\rho : G \to \mathrm{Aut}_K(V)$ heißt *irreduzibel* falls kein Untervektorraum U von V mit $\{0\} \subsetneqq U \subsetneqq V$ und $\rho(G)(U) \subseteq U$ existiert.

c) Eine lineare Darstellung $\rho : G \to \mathrm{Aut}_K(V)$ heißt *vollständig reduzibel*, falls aus der Existenz eines Untervektorraumes U von V mit $\rho(G)(U) \subseteq U$ die Existenz eines Unterverktorraumes W von V mit $\rho(G)(W) \subseteq W$ und $V = U \oplus W$ folgt .

Beispiel.

1) Die Darstellung $\rho : S_n \to \mathrm{Iso}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n)$, gegeben durch $\rho(\sigma)(e_i) = e_{\sigma^{-1}(i)}$, wobei $\sigma \in S_n$ und $i = 1, \ldots, n$ ist, ist für $n > 1$ nicht irreduzibel. Hier ist $e_1, e_2, \ldots, e_n$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^n$. In der Tat, die Gerade U, die durch $e_1 + e_2 + \cdots + e_n$ läuft, ist $\rho(S_n)$-invariant.

Es ist leicht zu sehen, dass für $n = 3$ diese Darstellung vollständig reduzibel ist: Als W kann man die Ebene nehmen, die senkrecht zu der Geraden U ist.

2) Die Darstellung $\rho : A_5 \to \mathrm{Aut}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$, die aus der Symmetriegruppe eines Ikosahedrons enspringt, ist irreduzibel.

Satz 24.3. (Maschke) Sei $\rho : G \to \mathrm{Aut}_K(V)$ eine lineare Darstellung einer endlichen Gruppe. Ist $\mathrm{char}(K) \nmid |G|$, dann ist ρ vollständig reduzibel.

25 Vorlesung
Eine Anwendung der Darstellungstheorie

Satz 25.1. (Schur) Sei G eine endliche Gruppe und A eine normale Untergruppe von G. Ist $\mathrm{ggT}(|A|, |G/A|) = 1$, dann existiert eine Untergruppe K in G mit $|K| = |G/A|$.