Prof. Dr. Oleg Bogopolski Abgabe: Fr, 23.11.2012, 12.20 Uhr

Gruppentheorie
Übungsblatt 6

Aufgabe 1. Beweisen Sie, dass jede endlich erzeugte Gruppe G mit dem Gesetz $g^2=1$ für alle $g \in G$ endlich ist.

Aufgabe 2. Berechnen Sie die Ordnung des Elements $\alpha^{-2}\tau^2\alpha\tau$ in der Gruppe von Gupta-Sidki.

Hinweis. `Die Gruppe von Gupta-Sidki wurde in der Vorlesung 11 (aber nicht im Skript) erklärt. Man kann sie in folgendem Buch auf Seite 19 finden: G. Baumslag ‘‘Topics in Combinatorial Group Theory’’, Birkhauser, Berlin, 1993.`

Aufgabe 3. a) Beweisen Sie, dass die Gruppe G aller Matrizen der Form

$$\begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mit $a, b, c \in \mathbb{Z}_3$ die folgende Präsentation hat:

$$\langle x, y, z \,|\, x^3 = y^3 = z^3 = 1,\ [x,y] = z,\ [x,z] = [y,z] = 1 \rangle.$$

b) Gibt es in G ein Element der Ordnung 9?
Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 4. a) Finden Sie ein Graph Γ mit $\mathrm{Aut}(\Gamma) \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.
b) Finden Sie ein Graph Γ mit $\mathrm{Aut}(\Gamma) \cong \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$.

Information:

Satz von Frucht. *Für jede Gruppe G existiert ein Graph Γ mit* $\mathrm{Aut}(\Gamma) \cong G$.