Prof. Dr. Oleg Bogopolski Abgabe: Fr, 11.01.2013, 12.20 Uhr

Gruppentheorie
Übungsblatt 11

Aufgabe 1 (Eine Variation auf das Thema "Higman-Gruppe").

a) Beweisen Sie, dass die Gruppe

$$G_2 = \langle a_1, a_2 \mid \begin{array}{l} a_1^{-1}a_2a_1 = a_2^2, \\ a_2^{-1}a_1a_2 = a_1^2 \rangle \end{array}$$

trivial ist.

b) Beweisen Sie, dass die Gruppe

$$G_3 = \langle a_1, a_2, a_3 \mid \begin{array}{ll} a_1^{-1}a_2a_1 = a_2^2, & (1) \\ a_2^{-1}a_3a_2 = a_3^2, & (2) \\ a_3^{-1}a_1a_3 = a_1^2 \rangle & (3) \end{array}$$

trivial ist.

Hinweis zu b). Aus (1) folgt

$$a_2a_1a_2^{-1} = a_1a_2. \tag{4}$$

Aus (2) folgt

$$a_3^{-1}a_2a_3 = a_2a_3^{-1}. \tag{5}$$

Wir konjugieren (4) mit a_3:

$$a_3^{-1}a_2a_3 \cdot a_3^{-1}a_1a_3 \cdot a_3^{-1}a_2^{-1}a_3 = a_3^{-1}a_1a_3 \cdot a_3^{-1}a_2a_3. \tag{6}$$

Daraus leiten wir mit Hilfe von (5) und (3) ab:

$$a_2a_3^{-1} \cdot a_1^2 \cdot a_3a_2^{-1} = a_1^2 \cdot a_2a_3^{-1}. \tag{7}$$

Wieder mit Hilfe von (3) erhalten wir

$$a_2a_1^4a_2^{-1} = a_1^2 \cdot a_2a_3^{-1}. \tag{8}$$

Daraus folgt:

$$a_3 = a_2a_1^{-4}a_2^{-1}a_1^2a_2. \tag{9}$$

Schreiben wir das so:

$$a_3 = a_2a_1^{-2} \cdot a_1^{-2}a_2^{-1}a_1^2 \cdot a_2. \tag{10}$$

Beenden Sie das.

Aufgabe 2. Mit Hilfe der Todd-Coxeter-Methode berechnen Sie den Index der Untergruppe $\langle x \rangle$ in

$$G = \langle x, y \mid x^2,\ y^2, (xy)^3 \rangle.$$

Bemerkung. Ich möchte nachprüfen, ob Sie die Methode verstanden haben. Deswegen bitte ich Sie, nur diese Methode anzuwenden. Die Schritte müssen deutlich geschrieben werden.