Prof. Dr. Oleg Bogopolski Abgabe: Fr, 21.12.2012, 12.20 Uhr

Gruppentheorie
Übungsblatt 10

Zu Erinnerung. $\mathbb{H}^2 := \{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Im}(z) > 0\}$.
Für $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ und $z \in \mathbb{H}^2$ definieren wir $A{\cdot}z := \frac{az+b}{cz+d}$.
In der Vorlesung wurde bewiesen, dass $A{\cdot}z \in \mathbb{H}^2$ ist.
Auch wurden Geraden in $\mathbb{H}^2$ definiert.

Aufgabe 1.
1) Prüfen Sie nach, dass $B{\cdot}(A{\cdot}z) = (BA){\cdot}z$ ist.
2) Prüfen Sie nach, dass nur die Matrizen $\pm E$ in $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ identisch auf $\mathbb{H}^2$ wirken.

Aufgabe 2.
Wir betrachten die zwei Geraden in $\mathbb{H}^2$:

$$\begin{aligned} G_1 = &\quad \{1/2 + bi \,|\, b \in \mathbb{R},\ \ b > 0\}, \\ G_2 = &\quad \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z-2| = 1,\ \ \mathrm{Im}(z) > 0\}. \end{aligned}$$

Finden Sie eine Matrix $A \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, so dass $A{\cdot}G_1 = G_2$ ist.

Definition. Operiere eine Gruppe G auf einer Menge X von links. Man sagt, dass G auf X *transitiv* operiert, falls für je zwei Elemente $x_1, x_2 \in X$ ein $g \in G$ mit $g{\cdot}x_1 = x_2$ existiert.

Aufgabe 3. Beweisen Sie, dass $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ transitiv auf der Menge von Geraden von $\mathbb{H}^2$ operiert.

Aufgabe 4.
1) Beweisen Sie, dass $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ von folgenden Matrizen erzeugt ist:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad Y = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2) Beweisen Sie, dass $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ von folgenden Matrizen der Ordnungen 4 und 6 erzeugt ist:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Hinweis zu 2). Berechnen Sie verschiedene Produkte $A^k B^l$ und $B^l A^k$ mit $k, l \in \{-1, 1\}$.

Aufgabe 5. Für $z \in \mathbb{H}^2$ sei $\mathrm{St}(z)$ der Stabilisator von z in $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$:

$$\mathrm{St}(z) := \{X \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \,|\, X{\cdot}z = z\}.$$

1) Berechnen Sie $\mathrm{St}(i)$.
2) Berechnen Sie $\mathrm{St}(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i)$.