Prof. Dr. Oleg Bogopolski Abgabe: 30.11. um 14:20 Uhr

Gruppentheorie
Übungsblatt 7

Aufgabe 1.
a) Berechnen Sie die Ordnungen von $\mathrm{PSL}_2(2)$ und $\mathrm{PSL}_2(3)$.
b) Beweisen Sie, dass $\mathrm{PSL}_2(2) \cong S_3$ ist.
c) Finden Sie in $\mathrm{PSL}_2(3)$ eine Untergruppe der Ordnung 4 und eine der Ordnung 3.
d) Beweisen Sie, dass $\mathrm{PSL}_2(3) \cong A_4$ ist.

Hinweis. Betrachten Sie die Operierung von $\mathrm{PSL}_2(3)$ auf Geraden des 2-dimensionalen Vektorraums $\mathbb{F}_3^2$, die in den Beweisen der Sätze 9.3 und 13.3 besprochen wurde. Wenn Sie die Vorlesungen nicht besuchen, dann schauen Sie in mein Buch (Seiten 22-23).

Aufgabe 2. Betrachten wir die Heisenberg-Gruppe

$$H_3 = \{ \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{Z}\}.$$

a) Berechnen Sie das Zentrum von H_3.
b) Berechnen Sie die Kommutator-Untergruppe von H_3.

Aufgabe 3. Beweisen Sie: Wenn K ein Körper der Ordnung mindestens 4 ist, dann enthält $\mathrm{SL}_2(K)$ eine nicht-skalare diagonale Matrix.

Aufgabe 4.
a) Seien A, B abelsche Gruppen. Beweisen Sie, dass die Kommutator-Untergruppe des direkten Kranzproduktes $A \wr B$ gleich der folgenden Gruppe ist:

$$e_B\{f \in \mathrm{fun}(B, A) \mid \prod_{b \in B} f(b) = e_A\}.$$

b) Beweisen Sie, dass die Gruppe $\mathbb{Z}_2 \wr \mathbb{Z}_2$ nilpotent ist.
c) Beweisen Sie, dass die Gruppe $\mathbb{Z}_3 \wr \mathbb{Z}_2$ nicht nilpotent ist.