Prof. Dr. Oleg Bogopolski Abgabe: 23.11. um 14:20 Uhr

Gruppentheorie
Übungsblatt 6

Aufgabe 1. Sei N Normalisator von $H = \langle (12345) \rangle$ in A_5.
a) Beweisen Sie, dass $|N| = 10$ ist.
b) Finden Sie ein Element der Ordnung 2 in N.
c) Finden Sie alle Elemente von N.

Hinweis. Für a) benutzen Sie die Sätze 12.3 und 11.6 des Skriptes.

Aufgabe 2. Beweisen Sie, dass jede 2-Sylow Untergruppe von S_4 transitiv, aber nicht 2-transitiv auf $\{1, 2, 3, 4\}$ operiert.

Hinweis. Siehe das Beispiel aus der Vorlesung 11.

Aufgabe 3. Sei $n \geqslant 3$. Eine Untergruppe $G \leqslant S_n$ operiert auf $\{1, 2, \dots, n\}$ $(n-2)$-transitiv.
a) Beweisen Sie, dass $|G| = n!/2$ oder $|G| = n!$ ist.
b) Beweisen Sie, dass G gleich A_n oder S_n ist.

Hinweis. Für b) benutzen Sie Satz 6.6 des Skriptes.

Definition. Sei G eine Gruppe. Für $a, b \in G$ heißt das Element $[a, b] := aba^{-1}b^{-1}$ *Kommutator* von a und b. Die Untergruppe, die von allen Kommutatoren erzeugt ist, heißt Kommutator-Untergruppe und wird mit $[G, G]$ oder G' bezeichnet:

$$G' = \langle [a, b] \mid a, b \in G \rangle.$$

Aufgabe 4.
a) Beweisen Sie, dass $G' \trianglelefteq G$ ist.
b) Beweisen Sie, dass G/G' abelsch ist.
c) Sei $H \trianglelefteq G$. Beweisen Sie, dass G/H abelsch ist genau dann, wenn $G' \leqslant H$ ist.

Aufgabe 5. Berechnen Sie die Kommutator-Untergruppe einer der drei 2-Sylow Untergruppen von S_4.