Prof. Dr. Oleg Bogopolski Abgabe: 2.11. um 14:20 Uhr

Gruppentheorie
Übungsblatt 3

Aufgabe 1. Sei $G = A \wr B$, wobei $A = \{e_1, a, a^2\} \cong \mathbb{Z}_3$ und $B = \{e_2, b\} \cong \mathbb{Z}_2$ ist.
a) Finden Sie in G eine Untergruppe K, die $\mathbb{Z}_6$ isomorph ist.
b) Finden Sie in G eine Untergruppe L, die S_3 isomorph ist.

Aufgabe 2. Beweisen Sie, dass es nur zwei Gruppen der Ordnung 4 bis zu Isomorphie gibt, nämlich $\mathbb{Z}_4$ und $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

Hinweis. Analysieren Sie die Ordnungen von Elementen und Multiplikations-Tabellen.

Aufgabe 3. Sei $A \leqslant B \leqslant G$. Beweisen Sie, dass $|G : A| = |G : B| \cdot |B : A|$ ist.

Hinweis: Wenn xB eine linke Nebenklasse von B in G ist und yA eine linke Nebenklasse von A in B ist, dann ist xyA eine linke Nebenklasse von A in G.

Aufgabe 4.
Seien $A \leqslant G$ und $B \leqslant G$. Beweisen Sie, dass $|G : A \cap B| \leqslant |G : A| \cdot |G : B|$ ist.

Hinweis: Seien X, Y, Z die Mengen aller linken Nebenklassen von $A \cap B$ in G, von A in G und von B in G, entsprechend. Betrachten Sie eine passende Abbildung $X \to Y \times Z$.

Aufgabe 5. Sei $n \geqslant 5$. Beweisen Sie, dass A_n von allen 5-Zyklen erzeugt ist.