Prof. Dr. Oleg Bogopolski Abgabe: 18.01.2012 um 14:20 Uhr

Gruppentheorie
Übungsblatt 12

Aufgabe 1.
a) Wie viele reduzierte Elemente der Länge 2 gibt es in der freien Gruppe $F(a,b)$?
b) Wie viele reduzierte Elemente der Länge k gibt es in der freien Gruppe $F(a,b)$?
c) Wie viele reduzierte Elemente der Länge k gibt es in der freien Gruppe des Ranges n?

Aufgabe 2. Beweisen Sie, dass
a) $(a^{-1}ba^{-1}ba, a^{-1}ba)$ eine Basis der freien Gruppe $F(a,b)$ ist,
b) $\{a^2b^3,\ a^4b^5\}$ keine Basis der freien Gruppe $F(a,b)$ ist.

Aufgabe 3.
a) Sei $g = a^{-1}b^{-2}a^2b^3a \in F(a,b)$. Berechnen Sie die reduzierte Form von g^3.
b) Sei $1 \neq g \in F(a,b)$. Beweisen Sie, dass $|g^n| > |g|$ für alle $n \geqslant 1$ ist.

Hinweis zu b). Schreiben Sie g in der Form $g = uvu^{-1}$, wobei $u, v \in F(a,b)$ ist, das Wort uvu^{-1} reduziert ist und der erste und der letzte Buchstabe von v nicht zueinander invers sind. Dann berechnen Sie die reduzierte Form von $|g^n|$.

Aufgabe 4. Seien u, v zwei Elemente einer freien Gruppe F, so dass $u^n = v^n$ für ein $n \geqslant 1$ gilt. Beweisen Sie, dass $u = v$ gilt.

Aufgabe 5.
a) Beweisen Sie, dass die Menge aller Elemente der geraden Länge in $F(a,b)$ eine Untergruppe von $F(a,b)$ bildet.
b) Beweisen Sie, dass diese Untergruppe Index 2 in $F(a,b)$ hat.
c) Beweisen Sie, dass diese Untergruppe gleich $\langle a^2, b^2, ab \rangle$ ist.