Prof. Dr. Oleg Bogopolski

Abgabe: 19.10. um 14:20 Uhr

Gruppentheorie
Übungsblatt 1

Aufgabe 1.
a) Berechnen Sie die Menge aller linken Nebenklassen von $H = \{id, (123), (132)\}$ in A_4.
(A_n ist die Gruppe aller geraden Permutationen der Symbole $1, 2, \ldots, n$.)
b) Ist H normal in A_4? Begründen Sie Ihre Antwort.
c) Listen Sie alle normalen Untergruppen von A_4 auf.

Aufgabe 2.
a) Lösen Sie die Gleichung $7x = 2$ in $\mathbb{Z}_9$.
b) Finden Sie eine Lösung der Gleichung $z^7 = e^{4\pi i/9}$, so dass $z^9 = 1$ ist.
c) Finden Sie eine Lösung der Gleichung $z^{21} = e^{4\pi i/9}$, so dass $z^{27} = 1$ ist.

Aufgabe 3.
a) Beweisen Sie, dass die additive Gruppe der rationalen Zahlen $(\mathbb{Q}, +)$ nicht endlich erzeugt werden kann.
b) Beweisen Sie, dass es nur einen trivialen Homomorphismus von $\mathbb{Q}$ nach $\mathbb{Z}$ gibt.
(Ein Homomorphismus heißt trivial, wenn sein Bild gleich 0 ist.)

Aufgabe 4. Sei F eine freie abelsche Gruppe mit der Basis f_1, f_2, f_3 und sei A die Untergruppe von F, die von

$$\begin{aligned} a_1 &= f_1 + 2f_2 - 2f_3, \\ a_2 &= 3f_1 + 9f_2 - 6f_3, \\ a_3 &= f_1 - f_2 - 2f_3, \end{aligned}$$

erzeugt ist.
a) Finden Sie eine Basis f_1', f_2', f_3' von F und eine Basis $a_1', \ldots, a_k'$ von A, so dass $a_i' = m_i f_i'$ mit $m_i \in \mathbb{N}$ für $i = 1, \ldots, k$ ist.

b) Zerlegen Sie F/A in die direkte Summe von endlichen und unendlichen zyklischen Gruppen.

Aufgabe 5. Seien $A \leqslant G$ und $B \leqslant G$. Beweisen Sie, dass $|A : (A \cap B)| \leqslant |G : B|$ gilt.

Hinweis: Sei X die Menge der linken Nebenklassen von $A \cap B$ in A und sei Y die Menge der linken Nebenklassen von B in G. Denken Sie sich eine injektive Abbildung von X in Y aus.