

Vortrag:

Lineare Gleichungen

am 11. März 2009

von Maximilian Wahner

*Technische Universität Dortmund
Fakultät für Mathematik*

2.3 BEMERKUNG

Ein lineares Gleichungssystem kann **genau eine Lösung** haben, **unlösbar** sein oder **mehr als eine Lösung** besitzen.

Dies wird am Beispiel des Gauß'schen Verfahrens deutlich werden.

2.4 DEFINITION

Zu einer Matrix existiert ein **Zeilen-** und ein **Spaltenrang**. Der Zeilenrang ist dabei die Dimension des von den Zeilenvektoren aufgespannten Vektorraumes und entspricht der maximalen Anzahl linear unabhängiger Zeilenvektoren. Entsprechendes gilt für den Spaltenrang. Man kann zeigen, dass Zeilen- und Spaltenrang einer Matrix identisch sind und spricht deshalb vom **Rang** einer Matrix.

2.5 MINORENKRITERIUM

Eine Matrix A hat genau dann den Rang r , wenn es einen von Null verschiedenen **Minor** (Unterdeterminante) der Ordnung r von A gibt und wenn alle Minoren der Ordnung $> r$ von A verschwinden.

2.6 BEISPIEL

Die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ hat den Rang 2, denn es sind $\det(1) = 1 \neq 0$ und

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = 6 \neq 0, \text{ aber } \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} = 12 - 12 = 0.$$

2.7 SATZ

Genau dann ist das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ lösbar, wenn $\text{Rang}(A) = \text{Rang}(A, b)$ ist.

Wenn eine Lösung existiert, dann hat die allgemeine Lösung von (2) die Form $x = x_0 + x'$, dabei ist x' eine spezielle Lösung von $Ax = b$ (2) und x_0 die allgemeine Lösung des zu (2) gehörenden homogenen Systems $Ax = 0$.

Beweis:

Das System $Ax = b$ ist gleichwertig mit der Gleichung

$$s_1 x_1 + s_2 x_2 + \dots + s_n x_n = b, \quad (4)$$

wobei s_1, s_2, \dots, s_n die Spalten von A sind. Komponentenweise ergibt sich

$$\begin{aligned}
 a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
 a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
 \vdots & \\
 a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m
 \end{aligned} \tag{5}$$

$Ax = b$ ist also genau dann lösbar, wenn b als Linearkombination von s_1, \dots, s_n darstellbar ist, d. h. wenn $b \in \text{sp}(s_1, \dots, s_n)$ gilt. Wegen $\text{sp}(s_1, \dots, s_n) \subset \text{sp}(s_1, \dots, s_n, b)$ ist

$Ax = b$ lösbar

$$\begin{aligned}
 &\Leftrightarrow b \in \text{sp}(s_1, \dots, s_n) \Leftrightarrow \text{sp}(s_1, \dots, s_n) = \text{sp}(s_1, \dots, s_n, b) \Leftrightarrow \text{Rang}(s_1, \dots, s_n) = \text{Rang}(s_1, \dots, s_n, b) \\
 &\Leftrightarrow \text{Rang}(A) = \text{Rang}(A, b)
 \end{aligned}$$

Seien nun L die Lösungsmenge von $Ax = b$ und L_H die von $Ax = 0$.

Für den zweiten Teil des Satzes sind zwei Inklusionen zu zeigen:

Seien x' und x'' zwei Lösungen von $Ax = b$ (2), also $x', x'' \in L$, dann löst $x_0 = x'' - x'$ die Gleichung $Ax = 0$ (3):

$$\begin{aligned}
 Ax_0 &= A(x'' - x') = Ax'' - Ax' = b - b = 0 \\
 &\Rightarrow x_0 \in L_H \Rightarrow x'' = x' + x_0 \in x' + L_H
 \end{aligned} \tag{6}$$

Umgekehrt, wenn x' Gleichung (2) löst und x_0 Gleichung (3), dann erfüllt $x_0 + x'$ Gleichung (2). Sei dazu $x'' \in x' + L_H$:

$$\begin{aligned}
 Ax'' &= A(x_0 + x') = Ax_0 + Ax' = 0 + b = b \\
 &\Rightarrow x'' \in L
 \end{aligned} \tag{7}$$

Das zeigt, dass die allgemeine Lösung von $Ax = b$ durch Addition der speziellen Lösung x' und der allgemeinen Lösung x_0 von $Ax = 0$ entsteht. *q.e.d.*

2.8 KOROLLAR

Ist A eine reguläre ($n \times n$)-Matrix, d. h. $\text{Rang}(A) = n$ und $\det(A) \neq 0$. In diesem Fall ist A invertierbar und $Ax = b$ hat die eindeutige Lösung $x = A^{-1}b$, unabhängig von b .

Beweis:

A regulär bedeutet, dass A n linear unabhängige Spalten hat. Wegen $\text{Rang}(A) = \text{Rang}(A, b)$ existiert nach Satz (2.7) die eindeutige Lösung. *q.e.d.*

2.9 GEOMETRISCHE INTERPRETATION

Eine Gleichung der Form

$$\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n = c \tag{8}$$

mit $\alpha_i \neq 0$ stellt für $n = 2$ eine Linie, für $n = 3$ eine Ebene und im Allgemeinen eine Hyperebene dar.

Nun möchten wir die Schnittmenge mehrerer Ebenen bestimmen.

Dazu betrachten wir das folgende System von Ebenen:

$$\begin{array}{rcl}
 a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\
 \vdots & & \vdots \\
 a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n & = & b_m
 \end{array} \tag{9}$$

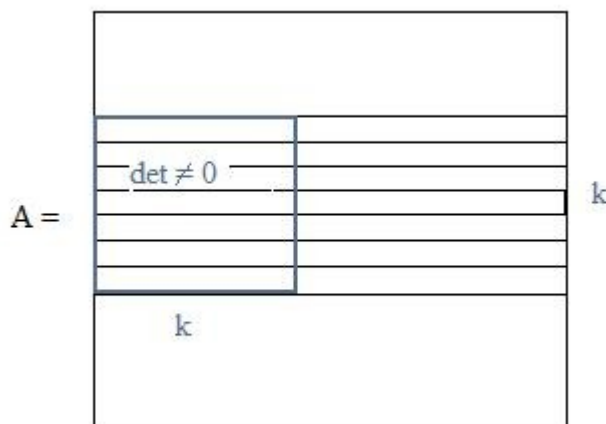
Vorgehensweise:

1) Überprüfe, ob $\text{Rang}(A) = \text{Rang}(A,b)$ gilt. Es dies nicht erfüllt, dann gibt es keine Lösung und das Verfahren endet.

2) Betrachte nur Zeilen, die linear unabhängig sind und lasse alle anderen weg:

$$\begin{array}{rcl}
 a_{i_1 1}x_1 + \dots + a_{i_1 n}x_n & = & b_{i_1} \\
 \vdots & & \vdots \\
 a_{i_k 1}x_1 + \dots + a_{i_k n}x_n & = & b_{i_k}
 \end{array} \tag{10}$$

3) Wähle einen $(k \times k)$ -Minor mit $\det \neq 0$:



$$\begin{array}{rcll}
 a_{i_1 1}x_1 + \dots + a_{i_1 k}x_k & = & b_{i_1} - a_{i_1 k+1}x_{k+1} + \dots - a_{i_1 n}x_n & = d_{i_1} \\
 \vdots & & \vdots & \vdots \\
 a_{i_k 1}x_1 + \dots + a_{i_k k}x_k & = & b_{i_k} - a_{i_k k+1}x_{k+1} + \dots - a_{i_k n}x_n & = d_{i_k}
 \end{array} \tag{11}$$

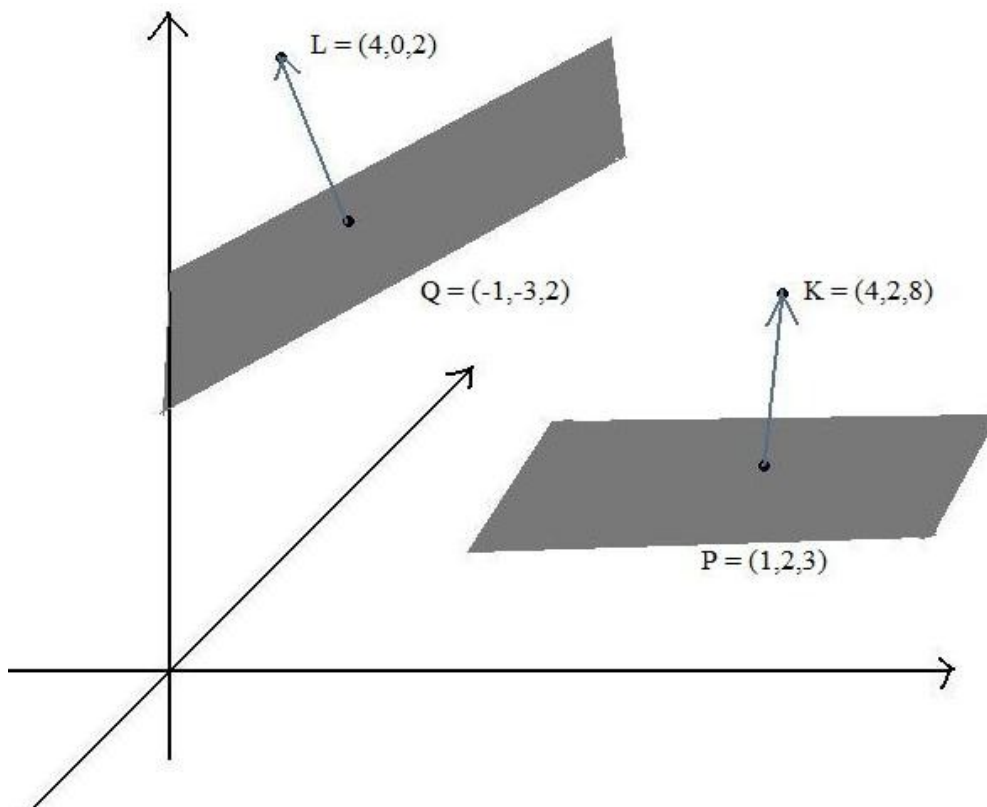
Dies kann umgeschrieben werden zu

$$\begin{pmatrix} a_{i_1,1} & \dots & a_{i_1,k} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{i_k,1} & \dots & a_{i_k,k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{i_1} \\ \vdots \\ d_{i_k} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{i_1,1} & \dots & a_{i_1,k} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{i_k,1} & \dots & a_{i_k,k} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} d_{i_1} \\ \vdots \\ d_{i_k} \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Nun haben wir die ersten k Unbekannten durch $(n - k)$ Parameter ausgedrückt.

2.10 BEISPIEL

Es soll die Schnittgerade von zwei Ebenen berechnet werden.



Die Ebenen sind durch folgende Gleichungen gegeben:

$$\begin{aligned} 3x + 0y + 5z &= 18 \\ 5x + 3y + 0z &= -14 \end{aligned} \quad (13)$$

Führe die eben genannten Schritte aus:

1) $\text{Rang} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 5 \\ 5 & 3 & 0 \end{pmatrix} = 2 = \text{Rang} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 5 & 18 \\ 5 & 3 & 0 & -14 \end{pmatrix}$. Also existiert eine Lösung.

2) Da beide Zeilen linear unabhängig sind, bleibt das System bestehen.

3) Wähle einen (2 x 2)-Minor und erhalte $\begin{matrix} 3x+0y & = & 18-5z \\ 5x+3y & = & -14-0z \end{matrix}$ bzw.

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18-5z \\ -14 \end{pmatrix} .$$

Es ergibt sich $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 18-5z \\ -14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ -5/9 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 18-5z \\ -14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-5/3z \\ -44/3+25/9z \end{pmatrix} .$

Das Ergebnis erhält man auch mit dem Gauß'schen Verfahren, welches im nächsten Abschnitt eingeführt wird.

3 Elementare Umformungen

Nun benötigen wir ein Verfahren, um die Lösungen eines linearen Gleichungssystems zu finden.

3.1 DEFINITION

Die Matrix A ist in **Stufenform**, wenn in jeder Zeile das erste von Null verschiedene Element gleich 1 ist und alle Einträge, die unterhalb oder in einer vorherigen Spalte liegen, gleich Null sind. Das Gleichungssystem hat dann die Form

$$\begin{aligned} x_{i_1} + \dots &= b_1 \\ x_{i_2} + \dots &= b_2 \\ &\dots \\ x_{i_r} + \dots &= b_r \\ 0 &= b_{r+1} \\ &\dots \\ 0 &= b_m \end{aligned} \tag{14}$$

mit $0 \leq r \leq m$. Genau dann existiert eine Lösung, wenn $b_{r+1} = \dots = b_m = 0$ ist.

3.2 BEISPIEL

Das System

$$\begin{aligned} x_1 - 4x_2 - 6x_3 - 20x_4 &= -1 \\ x_3 + 3x_4 &= 1 \end{aligned} \tag{15}$$

ist in Stufenform. Um es zu lösen, setzen wir $x_2 = \lambda$, $x_4 = \mu$. Dann folgt aus der letzten Gleichung $x_3 = 1 - 3\mu$ und schließlich $x_1 = 4\lambda + 6(1 - 3\mu) + 20\mu - 1 = 5 + 4\lambda + 2\mu$ mit $\lambda, \mu \in F$.

3.3 DEFINITION

Die folgenden Umformungen eines linearen Gleichungssystems heißen **elementare Umformungen**:

- (α) Vertauschen zweier Gleichungen R_i und R_j ,
- (β) Multiplikation einer Gleichung R_i mit einer Zahl $\lambda \neq 0$,
- (γ) Addition einer mit einer beliebigen Zahl multiplizierten Gleichung R_i zu einer Gleichung R_j , ($i \neq j$).

Wenn die erste Zeile einer Matrix eine Nullzeile ist, dann wendet man (α) an, um in der ersten Zeile Einträge, die nicht alle gleich Null sind, zu erhalten!

3.4 BEMERKUNG

Bei elementaren Umformungen ändert sich der Rang von A und die Lösungsmenge des Gleichungssystems nicht.

3.5 GAUß' SCHEs VERFAHREN

Jede Matrix A kann durch elementare Zeilenumformungen in Stufenform überführt werden.

Beweis:

Ist $A = 0$, so ist nichts zu zeigen. Im Fall $A \neq 0$ betrachten wir die erste von Null verschiedene Spalte von A . Durch elementare Umformungen des Typs (α) erreichen wir für das erste Element in dieser Spalte, dass es nicht Null ist und durch eine Umformung des Typs (β) wird es 1. Durch Umformungen vom Typ (γ) werden alle anderen Einträge der Spalte gleich Null. Ist a_{i1} das erste Element von Zeile R_i , dann hat $R_i - a_{i1}R_1$ eine Null als ersten Eintrag. Dadurch haben wir die Form

$$\begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & A' \end{pmatrix} \quad (16)$$

erreicht, mit einer Zeile c und einer Matrix A' mit $\text{Rang}(A') < \text{Rang}(A)$, weil die erste Zeile von (16) nicht linear abhängig von den Zeilen von A' sein kann.

Nun wendet man dieses Verfahren auf die Matrix A' an. Nach endlich vielen Schritten ergibt sich die Stufenform. *q.e.d.*

3.6 BEISPIEL

Wir betrachten das System

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 3 \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 &= 5 \\ x_1 + 2x_3 &= t \end{aligned} \quad (17)$$

Bestimme t so, dass das System eine Lösung hat und löse es schließlich vollständig:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 5 & 5 \\ 1 & 0 & 2 & t \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 - 3R_1, R_3 - R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 2 & -4 \\ 0 & -1 & 1 & t-3 \end{array} \right) \xrightarrow{-1/2 R_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & t-3 \end{array} \right) \xrightarrow{R_3 + R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & t-1 \end{array} \right).$$

(Der erste Eintrag in der ersten Spalte dieser Matrix wird **Pivotelement** genannt.)

Damit das System lösbar ist, muss $t = 1$ sein.

Setzt man $x_3 = \lambda$, so ergeben sich $x_2 = \lambda + 2$ und $x_1 = 1 - 2\lambda$. Diese Lösung lässt sich auch in der Form

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (18)$$

schreiben, geometrisch stellt die Lösung also eine Schnittgerade der drei durch das obige Gleichungssystem gegebenen Ebenen durch den Punkt $(1,2,0)^T$ dar. Für $t \neq 1$ schneiden sich die Ebenen nicht in einer gemeinsamen Geraden.

Analog berechnet man die Schnittgerade der beiden Ebenen aus Beispiel (2.10) mit dem Gauß'schen Verfahren:

$$\begin{aligned} 3x + 0y + 5z &= 18 \\ 5x + 3y + 0z &= -14 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} 3x + 0y + 5z &= 18 \\ 9y - 25z &= -132 \end{aligned} \Rightarrow$$

$$x = 1/3 (18 - 5z) = 6 - 5/3 z \quad \text{und} \quad y = 1/9 (-132 + 25z) = -44/3 + 25/9 z.$$

4 PAQ-Reduktion und Invertierung von Matrizen

Es ist möglich, für eine beliebige Matrix A invertierbare Matrizen P und Q zu finden, so dass gilt

$$PAQ = E_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (19)$$

wobei E_r und I_r Einheitsmatrizen und r deren Rang sind.

4.1 BEISPIEL

Sei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -8 & 1 & -1 \\ 5 & -20 & -4 & -22 \\ -3 & 12 & 5 & 21 \end{pmatrix}. \quad (20)$$

Schritt 1:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 2 & -8 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 5 & -20 & -4 & -22 \\ 0 & 0 & 1 & | & -3 & 12 & 5 & 21 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 2 & -8 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 & | & 1 & -4 & -6 & -20 \\ 0 & 0 & 1 & | & -3 & 12 & 5 & 21 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & | & 1 & -4 & -6 & -20 \\ 1 & 0 & 0 & | & 2 & -8 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & | & -3 & 12 & 5 & 21 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & | & 1 & -4 & -6 & -20 \\ 5 & -2 & 0 & | & 0 & 0 & 13 & 39 \\ -6 & 3 & 1 & | & 0 & 0 & -13 & -39 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & | & 1 & -4 & -6 & -20 \\ 5/13 & -2/13 & 0 & | & 0 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & | & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Allgemein: $I|A \rightarrow P_1|P_1A \rightarrow P_2P_1|P_2P_1A \rightarrow \dots \rightarrow P_r \dots P_1|P_r \dots P_1A$.

Hier ist nun $P_r \dots P_1A$ in Stufenform und $P = P_r \dots P_1$ invertierbar.

Schritt 2:

Die Reduktion wird mit Spaltenumformungen fortgesetzt:

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & -6 & -20 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -6 & -4 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 6 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Allgemein: $\frac{PA}{I} \rightarrow \frac{PAQ_1}{Q_1} \rightarrow \frac{PAQ_1Q_2}{Q_1Q_2} \rightarrow \frac{PAQ_1 \dots Q_s}{Q_1 \dots Q_s}$.

Es folgt $PAQ = E_2$, wobei $P = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 5/13 & -2/13 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ und $Q = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Dieses Ergebnis kann auf verschiedenen Wegen erreicht werden und die Matrizen P und Q sind nicht eindeutig!

4.2 ANWENDUNG

Sei A wie in Beispiel (4.1) gegeben und gelte $AX = b = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ mit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$.

Das Gleichungssystem hat also die Gestalt

$$\begin{aligned} 2x - 8y + z - t &= 1 \\ 5x - 20y - 4z - 22t &= 4 \\ -3x + 12y + 5z + 21t &= -3 \end{aligned} \quad (21)$$

Wegen $PAQQ^{-1}X = Pb$ erhält man mit P und Q aus dem vorherigen Beispiel, $\text{Rang}(A) = \text{Rang}(PAQ)$ und $X' = Q^{-1}X \Rightarrow X = QX'$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 5/13 & -2/13 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3/13 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -3/13 \\ z' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8/13 + 4z' + 2t' \\ z' \\ -3/13 - 3t' \\ t' \end{pmatrix}, \text{ wobei } z' \text{ und } t' \text{ beliebig sind.}$$

Ist A quadratisch und regulär, dann kann die Inverse allein durch Zeilenumformungen bestimmt werden:

4.3 BEISPIEL

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & | & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & | & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & | & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & | & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & | & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & | & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & | & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & | & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & | & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & | & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & | & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 & | & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & | & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Inverse von $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ist $\begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

5 Lineare Optimierung

Die **Lineare Optimierung** (auch **Lineare Programmierung** genannt) beschäftigt sich mit der Optimierung linearer Zielfunktionen über einer Menge, die durch lineare Gleichungen oder Ungleichungen eingeschränkt ist.

Unter dem Begriff „Programmierung“ versteht man eher „Planung“ als das Erstellen eines Computerprogramms. Er wurde schon in den 1940er Jahren von GEORGE DANTZIG (US-amerikanischer Mathematiker, 1914 – 2005), einem Begründer der Optimierung, geprägt. Wichtige Anwendungen sind Produktionsplanungen, Planungen von Verkehrs- und Telekommunikationsnetzen, aber auch die Spieltheorie.

Ziel ist oft die Maximierung eines Gewinns oder die Minimierung von Ausgaben.

5.1 DEFINITION

Bei einem **linearen Programm (LP)** sind eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{(m,n)}$ und zwei Vektoren $b \in \mathbb{R}^m$ und $c \in \mathbb{R}^n$ gegeben. Unter einer **zulässigen Lösung** versteht man dann einen

Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ mit nicht-negativen Einträgen, der das System

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n &\leq b_1 \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n &\leq b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n &\leq b_m \end{aligned} \quad (22)$$

erfüllt.

Ziel ist es nun, unter allen zulässigen Vektoren x einen zu finden, der das Skalarprodukt

$$c^T x = c_1 x_1 + \dots + c_n x_n \quad (23)$$

maximiert. Man kürzt dieses Optimierungsproblem mit

$$\max \{c^T x : Ax \leq b, x \geq 0\} \quad (24)$$

ab, wobei $Ax \leq b, x \geq 0$ komponentenweise zu verstehen sind.

Diese Schreibweise wird **Standardform** genannt.

Hat man statt eines Maximierungsproblems ein Minimierungsproblem, dann muss der **Zielfunktionsvektor** c mit (-1) multipliziert werden, um die Standardform zu erhalten.

5.2 GEOMETRISCHE INTERPRETATION

Die Lösungsmenge

$$P = \{x : Ax \leq b, x \geq 0\} \quad (25)$$

eines linearen Programms bildet ein **konvexes Polyeder**, also ein n -dimensionales Vieleck, in dem die Verbindungslinie zwischen zwei beliebigen Punkten von P vollständig in P enthalten ist.

5.3 BEISPIEL

Bei „kleinen Problemen“ mit zwei Variablen ist es möglich, das Problem graphisch zu lösen:

Aufgabenstellung

Eine Schulklasse mit 29 Schülern und 6 Begleitpersonen (mit Führerschein) möchte einen Ausflug machen. Um zu ihrem Ausflugsziel zu kommen, können sie Kleinbusse mit 8 Sitzplätzen bzw. Autos mit 5 Sitzplätzen mieten, die von den Begleitpersonen gefahren werden sollen.

Die Busse kosten 50 € am Tag, die Autos 20 €.

Wie viele Busse bzw. Autos müssen die Schüler mieten, um möglichst preisgünstig den Ausflug machen zu können?

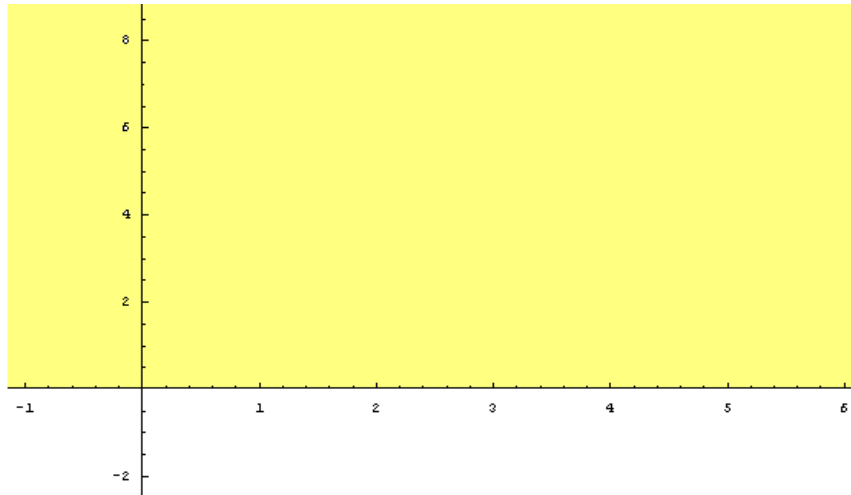
Lösung

Wir setzen $x =$ Anzahl der Busse und $y =$ Anzahl der Autos.

Welche Bedingung gilt für die Anzahl der Autos?

$$y \geq 0 \quad .$$

Also muss die Lösung im folgenden markierten Bereich liegen:

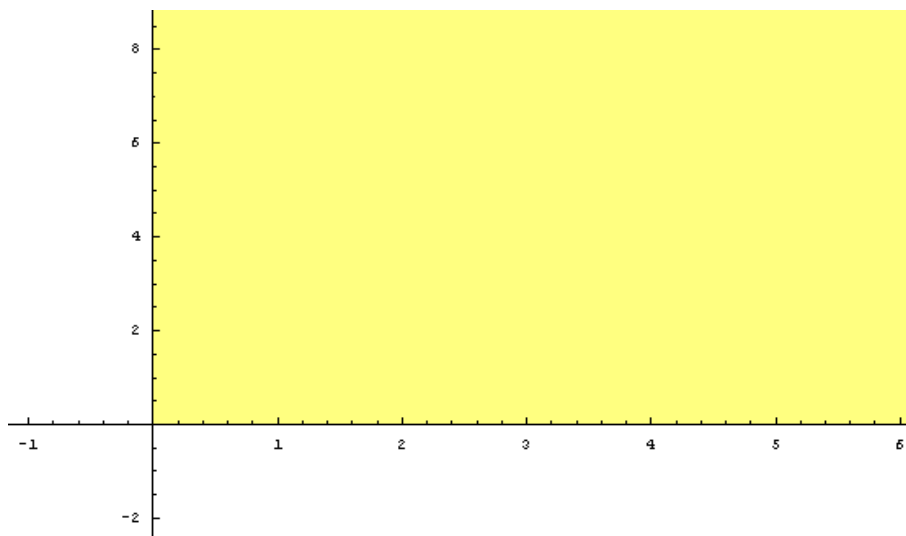


Welche Bedingung gilt für die Busse?

$$x \geq 0 \quad .$$

Welcher Teil fällt also weg?

Bereich links von der y-Achse:



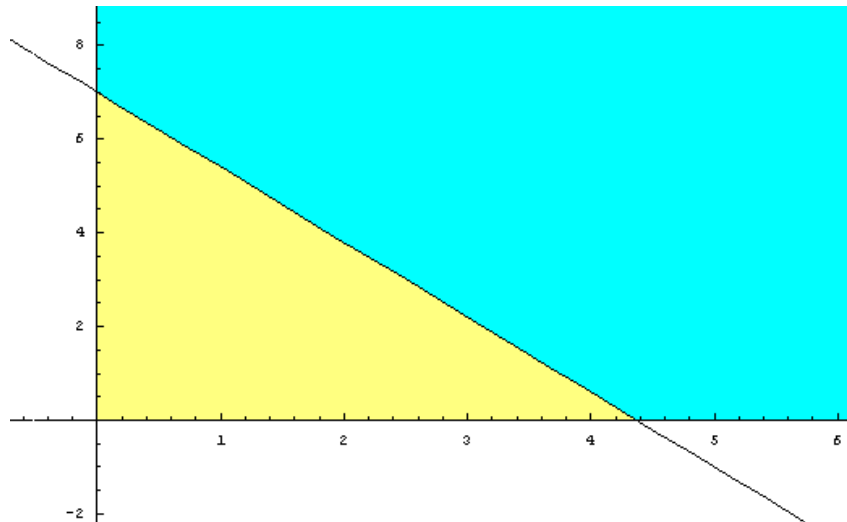
Die ersten beiden *Nebenbedingungen* wurden schon verwendet.

Eine weitere Nebenbedingung erhält man mit

$$8x + 5y \geq 35 \quad \Rightarrow \quad y \geq -\frac{8}{5}x + 7,$$

denn es müssen mindestens 35 Sitzplätze sein.

Diese Nebenbedingungen vereinbart ergeben:



Dabei erfüllt der türkisfarbene Bereich die Bedingungen

$$y \geq 0, \quad x \geq 0 \quad \text{und} \quad y \geq -\frac{8}{5}x + 7$$

und der gelbe Bereich

$$y \geq 0, \quad x \geq 0.$$

Die letzte Nebenbedingung folgt daraus, dass die Gruppe nur 6 Fahrer zur Verfügung hat:

$$x + y \leq 6 \quad \Rightarrow \quad y \leq -x + 6$$

Im roten Bereich sind nun die Nebenbedingungen

$$y \geq 0, \quad x \geq 0 \quad \text{und} \quad y \leq -x + 6,$$

im lila Bereich alle Nebenbedingungen erfüllt, denn hier überschneiden sich alle Bereiche:



Daher liegt im lila Bereich die Lösung des Problems!

Nun kann die **Zielfunktion** aufgestellt werden:

Wenn ein Bus 50 € kostet, ein Auto 20 € am Tag, dann ist (x = Anzahl der Busse, y = Anzahl der Autos):

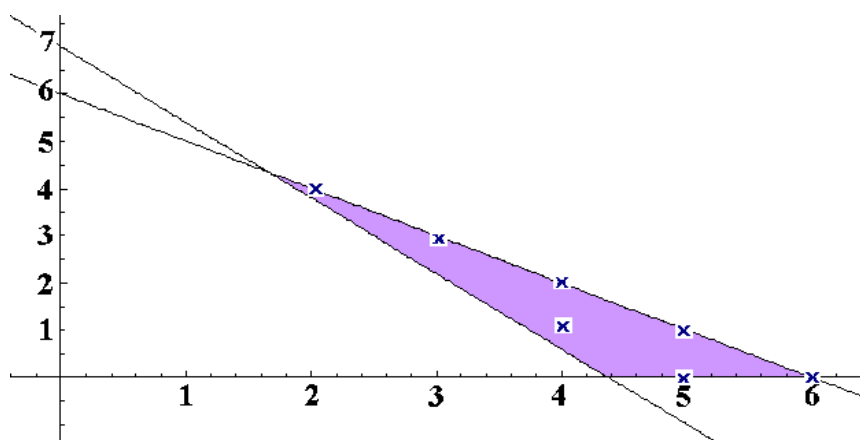
$$Z = 50x + 20y \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{5}{2}x + \frac{Z}{20}$$

Durch Geradenverschiebung erhält man den minimalen y -Achsenabschnitt.

Normalerweise liegen die Lösungen in einer Ecke des zulässigen Bereichs, wegen der weiteren Nebenbedingung

$$x, y \text{ natürliche Zahlen}$$

sind aber nur bestimmte Punkte des **zulässigen Bereichs** (Menge aller Punkte, die die Nebenbedingungen erfüllen) möglich:



Damit ergibt sich der Punkt $(2/4)$ als Lösung.

7 Quellenverzeichnis

- [1] P. M. Cohn, Algebra Vol. 1 Second Edition, 1982, S. 112 – 135
- [2] http://de.wikipedia.org/wiki/Lineare_Optimierung
- [3] <http://www.numerik.mathematik.uni-mainz.de/didaktikseminar/Gruppe7/simplexverfahren.htm>