

# Wichtige Schritte zum Verständnis von Lie-Algebras<sup>1</sup>

1. Sei  $G$  eine geschlossene lineare Untergruppe von  $GL_n(\mathbb{C})$  und sei  $\mathfrak{g}$  ihre tangente Lie-Algebra. Dann ist  $\exp(\mathfrak{g}) \subseteq G$ . Außerdem erzeugt  $\exp(\mathfrak{g})$  eine zusammengehängte Komponente von  $\mathfrak{g}$ , die das neutrale Element von  $\mathfrak{g}$  enthält.

Weiterhin ist  $K$  ein algebraisch abgeschlossener Körper der Charakteristik 0.

2. **Satz (Lie).** Seien

$\mathfrak{g}$  eine endlichdimensionale auflösbare Lie-Algebra über  $K$ ,  
 $V$  ein endlichdimensionaler Vektorraum über  $K$  und  
 $\varphi : \mathfrak{g} \rightarrow \text{End}(V)$  eine Darstellung.

Dann existiert eine Basis  $\mathcal{B}$  von  $V$ , so dass gilt

$$[\varphi(g)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} * & * & \dots & * & * \\ 0 & * & & & * \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & * & * \\ 0 & \dots & \dots & 0 & * \end{pmatrix}.$$

3. **Satz (Engel).** Sei  $V$  ein endlichdimensionaler Vektorraum über  $K$  und sei  $\mathfrak{g}$  eine Lie-Unteralgebra von  $\text{End}(V)$ , so dass jedes Element von  $\mathfrak{g}$  nilpotent ist. Dann gelten:

- (1)  $\mathfrak{g}$  ist eine nilpotente Lie-Algebra.
- (2) Es existiert  $v \in V \setminus \{0\}$ , so dass  $X(v) = 0$  für alle  $X \in \mathfrak{g}$  ist.
- (3) Es existiert eine Basis  $\mathcal{B}$  von  $V$ , so dass gilt

$$[\varphi(g)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & * & \dots & * & * \\ 0 & 0 & & & * \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & 0 & * \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Die Lie-Algebra

$$\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) = \{M \in M(2, \mathbb{C}) \mid \text{Spur}(M) = 0\}$$

hat eine Basis

$$h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es gelten die Formeln:

$$\begin{aligned} [h, e] &= 2e, \\ [h, f] &= -2f, \\ [e, f] &= h. \end{aligned}$$

---

<sup>1</sup>Die Beweise kann man in dem Buch [Antony W. Knappp "Lie Groups beyond an introduction", Second ed. Progress in Math., v. 40, Birkhäuser, Boston-Basel-Berlin] finden.

#### 4.1. Satz (irreduzible Darstellungen von $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ ).

Für alle natürlichen  $m \geq 1$  existiert eine einzige (bis zu einer Äquivalenz) irreduzible komplexe Darstellung  $\varphi : \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \rightarrow \text{End}(V)$ , so dass  $\dim V = m$  ist. Außerdem hat  $V$  eine Basis  $\{v_0, v_1, \dots, v_{m-1}\}$ , so dass (weiter  $n = m - 1$ ) gelten:

- (1)  $\varphi(h)(v_i) = (n - 2i)v_i$ ,
- (2)  $\varphi(e)v_0 = 0$ ,
- (3)  $\varphi(f) = v_{i+1}$ , wobei  $v_{n+1} = 0$  ist,
- (4)  $\varphi(e)v_i = i(n - i + 1)v_{i-1}$ , wobei  $v_{-1} = 0$  ist.

**5. Klassifikation der halbeinfachen Lie-Algebren.** Sei  $\mathfrak{g}$  eine Lie-Algebra und sei  $\eta$  eine Lie-Unteralgebra von  $\mathfrak{g}$ . Sei  $\eta^*$  ein dualer Vektorraum (der alle linearen Funktionale  $\eta \rightarrow K$  enthält). Für  $\alpha \in \eta^*$  bezeichnen wir

$$\mathfrak{g}_\alpha = \{X \in \mathfrak{g} \mid (\text{ad } H - \alpha(H) \cdot \text{id})^n X = 0 \text{ für alle } H \in \eta, \text{ wobei } n = n(H, X) \text{ ist}\}.$$

Dann ist  $\mathfrak{g}_\alpha$  eine Lie-Unteralgebra von  $\mathfrak{g}$ . Bezeichnen wir

$$\Delta = \{\alpha \in \eta^* \mid \mathfrak{g}_\alpha \neq 0\}.$$

**5.1. Satz (Zerlegung von  $\mathfrak{g}$  bezüglich einer nilpotenten Unteralgebra).** Sei  $\mathfrak{g}$  eine endlichdimensionale Lie-Algebra über  $K$  und sei  $\eta$  eine nilpotente Lie-Unteralgebra von  $\mathfrak{g}$ .

Dann gelten:

- (1)  $\mathfrak{g} = \bigoplus_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{g}_\alpha$ ,
- (2)  $\eta \subseteq \mathfrak{g}_0$ ,
- (3)  $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \subseteq \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$ .

**Definition.** Eine Cartansche Unteralgebra von  $\mathfrak{g}$  ist eine nilpotente Unteralgebra  $\eta$  von  $\mathfrak{g}$ , so dass  $\eta = \mathfrak{g}_0$  ist.

**Definition.** Der Normalisator von  $\eta$  ist

$$N_{\mathfrak{g}}(\eta) = \{X \in \mathfrak{g} \mid [X, \eta] \subseteq \eta\}.$$

Es ist klar, dass  $\eta \subseteq N_{\mathfrak{g}}(\eta)$  ist.

**5.2. Satz.** Sei  $\mathfrak{g}$  eine endlichdimensionale Lie-Algebra über  $K$ . Eine nilpotente Unteralgebra  $\eta$  von  $\mathfrak{g}$  ist eine Cartansche Unteralgebra nur dann, wenn  $\eta = N_{\mathfrak{g}}(\eta)$  ist.

**5.3. Satz.** In jeder endlichdimensionalen Lie-Algebra über  $K$  existiert eine einzige (bis zu einem Automorphismus) Cartansche Unteralgebra.

**5.4. Satz.** Sei  $\mathfrak{g}$  eine halbeinfache endlichdimensionale Lie-Algebra über  $K$  und sei  $\eta$  eine Cartansche Unteralgebra von  $\mathfrak{g}$ . Dann ist  $\eta$  abelsch und  $\dim \mathfrak{g}_\alpha = 1$  ist für alle  $\alpha \in \Delta \setminus \{0\}$ .

Eine weitere Theorie beschreibt alle möglichen  $\Delta$  mit Hilfe eines Skalarproduktes (das wird aus der Killing-Form konstruiert) und klassifiziert schließlich alle halbeinfachen endlichdimensionalen Lie-Algebren über  $\mathbb{C}$ . Das wird im WS07/08 skizziert. Danach kommen wir näher zu den Lieschen Gruppen.