# Probeklausur der Gruppe 5

## Aufgabe 1 [15 Punkte]

Wir betrachten die Gruppe $(\mathbb{Z}_{18}^*, \bullet)$.

(a) Geben Sie alle Elemente dieser Gruppe an. [2 Punkte]

$$\begin{aligned}(\mathbb{Z}_{18}^*, \bullet) &= \{x \in \mathbb{Z}_{18} \mid \text{ es gibt ein } a \in \mathbb{Z}_{18} \text{ so dass } x \bullet a = 1\} \\ &= \{x \in \mathbb{Z}_{18} \mid \mathrm{ggT}(x, 18) = 1\} \\ &= \{1, 5, 7, 11, 13, 17\}\end{aligned}$$

(b) Geben Sie von jedem Element seine Ordnung an. [3 Punkte]

$1^1 = 1$

$5^1 = 5$
$5^2 = 25 = 7$
$5^3 = 7 \bullet 5 = 35 = 17$

$7^1 = 7$
$7^2 = 49 = 13$
$7^3 = (-5) \bullet 7 = -35 = 1$

$11^1 = 11$
$11^2 = (-7)^2 = 13$
$11^3 = (-5) \bullet (-7) = 35 = 17$

$13^1 = 13$
$13^2 = (-5)^2 = -25 = 11$
$13^3 = (-5)^3 = -17 = 1$

$17^1 = 17$
$17^2 = (-1)^2 = 1$

Nach einer Folgerung aus dem Satz von Lagrange wissen wir, dass die Ordnung eines Elements nur ein Teiler von 6 sein kann, also $\{1, 2, 3, 6\}$. Elemente, deren Ordnung nicht 1,2 oder 3 ist, müssen die Ordnung 6 haben.

| $x$ | 1 | 5 | 7 | 11 | 13 | 17 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mathrm{Ord}(x)$ | 1 | 6 | 3 | 6 | 3 | 2 |

(c) Begründen Sie, ob die Gruppe zyklisch ist. [3 Punkte]

$(\mathbb{Z}_{18}^*, \bullet) = \langle 5 \rangle = \{5^1, 5^2, 5^3, 5^4, 5^5, 5^6\} = \{5, 7, 17, 13, 11, 1\}$ ist zyklisch.

(d) Geben sie alle Untergruppen an. [4 Punkte]

$$\begin{aligned}U_1 &= \langle 1 \rangle = \{1\} \\ U_2 &= \langle 17 \rangle = \{1, 17\} \\ U_3 &= \langle 7 \rangle = \langle 13 \rangle = \{1, 7, 13\} \\ U_4 &= \langle 5 \rangle = \langle 11 \rangle = \{1, 5, 7, 11, 13, 17\} = (\mathbb{Z}_{18}^*, \bullet)\end{aligned}$$

(e) Finden Sie ein $x \in \mathbb{Z}_{18}^*$ mit $x^4 = 7$. [3 Punkte]

Aus b) sieht man sofort, dass $x = 7$ diese Bedingung erfüllt.

**Aufgabe 2 [10 Punkte]**

In der symmetrischen Gruppe $(S_{10}, \circ)$ seien die folgenden Permutationen definiert:

$$\begin{aligned}\sigma_1 = &\ (1\ 5\ 7) \circ (3\,2\,9\ 10\ 6) \circ (4\ 8),\\ \sigma_2 = &\ (3\ 2\ 10\ 9\ 5) \circ (6\ 10\ 9\ 1),\\ \sigma_3 = &\ (2\ 5\ 3) \circ (4\ 10).\end{aligned}$$

(a) Berechnen Sie $\sigma_1^{-1} \circ \sigma_2$. [3 Punkte]

$$\begin{aligned}\sigma_1^{-1} \circ \sigma_2 &= (8\,4) \circ (6\,10\,9\,2\,3) \circ (7\,5\,1) \circ (3\ 2\ 10\ 9\ 5) \circ (6\ 10\ 9\ 1)\\ &= (1\,10) \circ (2\,9\,7\,5\,6) \circ (4\,8)\end{aligned}$$

(b) Berechnen Sie $\mathrm{Sign}(\sigma_2)$. [3 Punkte]

$$\mathrm{Sign}(\sigma_2) = (-1)^{4+3} = -1$$

(c) Sei $x \in S_{10}$ die Permutation, für die $x \circ \sigma_2^{-1} = \sigma_3$ gilt. Schreiben Sie $x$ als Produkt von unabhängigen Zykeln. [4 Punkte]

Die Gleichung $x \circ \sigma_2^{-1} = \sigma_3$ ist q̈uivalent zu $x = \sigma_3 \circ \sigma_2$. Mit

$$\begin{aligned}x &= (2\ 5\ 3) \circ (4\ 10) \circ (3\ 2\ 10\ 9\ 5) \circ (6\ 10\ 9\ 1)\\ &= (1\,6\,9) \circ (2\,4\,10\,3\,5)\end{aligned}$$

**Aufgabe 3 [5 Punkte]**

Formulieren Sie die Dimensionsformel für Untervektorräume.

V ein endlich erzeugter Vektorraum und $U_1, U_2$ Untervektorräume von V. Dann gilt

$$\dim(U_1 + U_2) = \dim(U_1) + \dim(U_2) - \dim(U_1 \cap U_2)$$

**Aufgabe 4 [5 Punkte]**

Geben Sie die Definition eines Vektorraums an. Sie dürfen hierbei die Definition einer Gruppe und eines Körpers als bekannt vorausssetzen.

Eine kommutative Gruppe $(V, +)$ zusammen mit einer Verknüpfung

$$\cdot : K \times V \to V,$$

wobei $(K, +_K, \cdot_K)$ ein Körper heisst Vektorraum über K, wenn gilt:

$$\begin{array}{ll} (VS1) & (\lambda \cdot_K \mu) \cdot v = \lambda \cdot (\mu \cdot v) \text{ für alle } \lambda, \mu \in K, v \in V, \\ (VS2) & 1_K \cdot v = v \text{ für alle } v \in V, \\ (VS3) & (\lambda +_K \mu) \cdot v = \lambda \cdot v + \mu \cdot v \text{ für alle } \lambda, \mu \in K, v \in V, \\ (VS4) & \lambda \cdot (u + v) = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v \text{ für alle } \lambda \in K, u, v \in V. \end{array}$$

**Aufgabe 5 [10 Punkte]**

(a) In $\mathbb{R}^3$ seien $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, u_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ gegeben. Bestimmen Sie eine Basis des Schnittes von
$\mathcal{L}(v_1, v_2) = \{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 \mid \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}\}$ und
$\mathcal{L}(u_1, u_2) = \{\beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 \mid \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}\}$ an. [7 Punkte]

(b) Bestimmen Sie eine Basis von

$$\mathcal{L}(v_1, v_2) + \mathcal{L}(u_1, u_2). \text{ [3 Punkte]}$$

(a)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(v_1, v_2) \cap \mathcal{L}(u_1, u_2) &= \{\beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 \mid \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R} \text{ und es existieren } \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \\ &\qquad \text{so dass } \beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 = \alpha_1 v_1 + \alpha_1 v_2\}. \end{aligned}$$

Die Gleichung $\beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 = \alpha_1 v_1 + \alpha_1 v_2$ ist äquivalent zu

$$\left\{ \begin{array}{rrrrl} & 2\alpha_2 & -3\beta_1 & +\beta_2 & = 0 \\ & \alpha_2 & -\beta_1 & & = 0 \\ \alpha_1 & -2\alpha_2 & +\beta_1 & +2\beta_2 & = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rrrrl} \alpha_1 & -2\alpha_2 & +\beta_1 & +2\beta_2 & = 0 \\ & \alpha_2 & -\beta_1 & & = 0 \\ & & -\beta_1 & +\beta_2 & = 0 \end{array} \right.$$

Aus der dritten Gleichung folgt, dass $\beta_1 = \beta_2$. Also ist

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(v_1, v_2) \cap \mathcal{L}(u_1, u_2) &= \{\beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 \mid \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R} \text{ und } \beta_1 = \beta_2\} \\
&= \{\beta_2 u_1 + \beta_2 u_2 \mid \beta_2 \in \mathbb{R}\} \\
&= \{\beta_2 (u_1 + u_2) \mid \beta_2 \in \mathbb{R}\} \\
&= \left\{ \beta_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \mid \beta_2 \in \mathbb{R} \right\}
\end{aligned}$$

Also ist $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}$ eine Basis von $\mathcal{L}(v_1, v_2) \cap \mathcal{L}(u_1, u_2)$.

(b) Nach der Dimensionsformel gilt $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{L}(v_1, v_2) + \mathcal{L}(u_1, u_2) =$
$= \dim_{\mathbb{R}} \mathcal{L}(v_1, v_2) + \dim_{\mathbb{R}} \mathcal{L}(u_1, u_2) - \dim_{\mathbb{R}} \mathcal{L}(v_1, v_2) \cap \mathcal{L}(u_1, u_2)$
$= 2 + 2 - 1 = 3$. Also ist $\mathcal{L}(v_1, v_2) + \mathcal{L}(u_1, u_2) = \mathbb{R}^3$. Dann ist zum Beispiel

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

eine Basis.