Probeklausur der Gruppen 3 und 4

Aufgabe 1 [15 Punkte]

Wir betrachten die Gruppe $(\mathbb{Z}_{24}^*, \bullet)$.

(a) Geben Sie alle Elemente dieser Gruppe an. [2 Punkte]

$$\begin{aligned}(\mathbb{Z}_{24}^*, \bullet) &= \{x \in \mathbb{Z}_{24} \mid \text{ es gibt ein } a \in \mathbb{Z}_{24} \text{ so dass } x \bullet a = 1\}\\ &= \{x \in \mathbb{Z}_{24} \mid \mathrm{ggT}(x, 24) = 1\}\\ &= \{1, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23\}\end{aligned}$$

(b) Geben Sie von jedem Element seine Ordnung an. [3 Punkte]

$1^1 = 1$

$5^1 = 5$
$5^2 = 25 = 1$

$7^1 = 7$
$7^2 = 49 = 1$

$11^1 = 11$
$11^2 = 121 = 1$

$13^1 = 13$
$13^2 = (-11)^2 = 1$

$17^1 = 17$
$17^2 = (-7)^2 = 1$

$19^1 = 19$
$19^2 = (-5)^2 = 1$

$23^1 = 23$
$23^2 = (-1)^2 = 1$

x	1	5	7	11	13	17	19	23
$\mathrm{Ord}(x)$	1	2	2	2	2	2	2	2

(c) Begründen Sie, ob die Gruppe eine zyklische Untergruppe mit 4 Elementen besitzt. [3 Punkte]

In einer zyklischen Untergruppe müsste ein Element der Ordnung 4 sein. Da es ein solches nicht gibt, git es so eine Untergruppe nicht.

(d) Finden Sie eine Untergruppe der Ordnung 4. [4 Punkte]

$U = \langle 5, 7\rangle = \{1, 5, 7, 11\}$ ist eine Untergruppe mit der Verknüpfungstabelle

$\bullet$	1	5	7	11
1	1	5	7	11
5	5	1	11	7
7	7	11	1	5
11	11	7	5	1

(e) Finden Sie alle Elemente $x \in \mathbb{Z}_{24}^*$ mit $x^5 = 11$. [3 Punkte] Da $x^5 = x^2 \bullet x^2 \bullet x = 1 \bullet 1 \bullet x = x$ gilt, folgt dass $x = 11$ das einzige Element mit $x^5 = 11$ ist.

Aufgabe 2 [10 Punkte]

In der symmetrischen Gruppe $(S_{10}, \circ)$ seien die folgenden Permutationen definiert:

$$\begin{aligned} \sigma_1 = &\ (3\ 5\ 8) \circ (1\ 4\ 7\ 8\ 9) \circ (2\ 10), \\ \sigma_2 = &\ (1\ 3\ 8\ 5\ 2) \circ (9\ 8\ 7\ 4) \\ \sigma_3 = &\ (1\ 4\ 3) \circ (2\ 8). \end{aligned}$$

(a) Berechnen Sie σ_1^{-1}. [3 Punkte]

$$\sigma_1^{-1} = (10\,2) \circ (9\,8\,7\,4\,1) \circ (8\,5\,3)$$

(b) Berechnen Sie $\mathrm{Sign}(\sigma_2)$. [3 Punkte]

$$\mathrm{Sign}(\sigma_2) = (-1)^{4+3} = -1$$

(c) Sei $x \in S_{10}$ die Permutation, für die $\sigma_1^2 \circ x = \sigma_3$ gilt. Schreiben Sie x als Produkt von unabhängigen Zykeln. [4 Punkte]

Die Gleichung $\sigma_1^2 \circ x = \sigma_3$ ist äquivalent zu $x = \sigma_1^{-2} \circ \sigma_3$. Mit

$\sigma_1^{-2} = (10\,2) \circ (9\,8\,7\,4\,1) \circ (8\,5\,3) \circ (10\,2) \circ (9\,8\,7\,4\,1) \circ (8\,5\,3) = (1\,8\,3\,4\,9\,5\,7)$

erhalten wir

$$\begin{aligned} x &= (1\,8\,3\,4\,9\,5\,7) \circ (1\ 4\ 3) \circ (2\ 8) \\ &= (1\,9\,5\,7) \circ (2\,3\,8) \end{aligned}$$

Aufgabe 3 [5 Punkte]

Formulieren Sie den Austauschsatz von Steinitz.

Sei $\{v_1, \ldots, v_k\}$ linear unabhängig in V und sei $\{u_1, \ldots, u_n\}$ eine Basis von V. Dann ist $n \geqslant k$ und es existieren $u_{i_1}, \ldots, u_{i_k} \in B$, so dass

$$B' = B \setminus \{u_{i_1}, \ldots, u_{i_k}\} \cup \{v_1, \ldots, v_k\}$$

auch eine Basis von V ist.

Aufgabe 4 [5 Punkte]

Geben Sie die Definition einer Gruppe an.

Eine Gruppe ist eine nicht-leere Menge G zusammen mit einer inneren Verknüpfung $* : G \times G \to G$, so dass

(1) für alle $a, b, c \in G$ gilt: $a * (b * c) = (a * b) * c$,

(2) es existiert ein $e \in G$, so dass für alle $a \in G$ gilt: $a * e = e * a = a$,

(3) für alle $a \in G$ existiert $b \in G$, so dass $a * b = b * a = e$ gilt.

Aufgabe 5 [10 Punkte]

(a) In $\mathbb{R}^3$ seien $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ gegeben. Bestimmen Sie eine Basis des Schnittes von
$\mathcal{L}(v_1, v_2) = \{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 \mid \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}\}$ und
$\mathcal{L}(u_1, u_2) = \{\beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 \mid \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}\}$ an. [7 Punkte]

(b) Bestimmen Sie eine Basis von

$$\mathcal{L}(v_1, v_2) + \mathcal{L}(u_1, u_2). \text{ [3 Punkte]}$$

(a)

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(v_1, v_2) \cap \mathcal{L}(u_1, u_2) &= \{\beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 \mid \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R} \text{ und es existieren } \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \\ &\quad \text{so dass } \beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 = \alpha_1 v_1 + \alpha_1 v_2\}.\end{aligned}$$

Die Gleichung $\beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 = \alpha_1 v_1 + \alpha_1 v_2$ ist äquivalent zu

$$\left\{\begin{array}{rrrrl} \alpha_1 & & -\beta_1 & +\beta_2 & = 0 \\ 2\alpha_1 & +\alpha_2 & & +2\beta_2 & = 0 \\ -2\alpha_1 & & +2\beta_1 & -2\beta_2 & = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rrrrl} \alpha_1 & & -\beta_1 & +\beta_2 & = 0 \\ & \alpha_2 & +2\beta_1 & & = 0 \\ & & & 0 & = 0 \end{array}\right.$$

Daraus folgt, dass für beliebige β_1, β_2 immer α_1, α_2 existieren mit $\beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 = \alpha_1 v_1 + \alpha_1 v_2$. Also ist

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(v_1, v_2) \cap \mathcal{L}(u_1, u_2) &= \{\beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 \mid \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}\} \\ &= \mathcal{L}(v_1, v_2) = \mathcal{L}(u_1, u_2)\end{aligned}$$

Eine Basis ist $\{v_1, v_2\}$.

(b) Da $\mathcal{L}(v_1, v_2) = \mathcal{L}(u_1, u_2)$ ist $\mathcal{L}(v_1, v_2) + \mathcal{L}(u_1, u_2) = \mathcal{L}(v_1, v_2)$. Eine Basis ist $\{v_1, v_2\}$.