Probeklausur der Gruppen 1 und 2

Aufgabe 1 [15 Punkte]

Wir betrachten die Gruppe $(\mathbb{Z}_{20}^*, \bullet)$.

(a) Geben Sie alle Elemente dieser Gruppe an. [2 Punkte]

$$\begin{aligned} (\mathbb{Z}_{20}^*, \bullet) &= \{x \in \mathbb{Z}_{20} \mid \text{ es gibt ein } a \in \mathbb{Z}_{20} \text{ so dass } x \bullet a = 1\} \\ &= \{x \in \mathbb{Z}_{20} \mid \text{ggT}(x, 20) = 1\} \\ &= \{1, 3, 7, 9, 11, 13, 17, 19\} \end{aligned}$$

(b) Geben Sie von jedem Element seine Ordnung an. [3 Punkte]

$1^1 = 1$

$3^1 = 3$
$3^2 = 9$
$3^3 = 9 \bullet 3 = 27 = 7$
$3^4 = 7 \bullet 3 = 21 = 1$

$7^1 = 7$
$7^2 = 49 = 9$
$7^3 = 9 \bullet 7 = 63 = 3$
$7^4 = 3 \bullet 7 = 21 = 1$

$9^1 = 9$
$9^2 = 81 = 1$

$11^1 = 11$
$11^2 = (-9)^2 = 1$

$13^1 = 13$
$13^2 = (-7)^2 = 9$
$13^3 = (-7)^3 = -3 = 17$
$13^4 = (-7)^4 = 1$

$17^1 = 17$
$17^2 = (-3)^2 = 9$
$17^3 = (-3)^3 = -7 = 13$
$17^4 = (-3)^4 = 1$

$19^1 = 19$
$19^2 = (-1)^2 = 1$

x	1	3	7	9	11	13	17	19
$\text{Ord}(x)$	1	4	4	2	2	4	4	2

(c) Begründen Sie, ob die Gruppe zyklisch ist. [3 Punkte]

$(\mathbb{Z}_{20}^*, \bullet)$ hat 8 Elemente, aber kein Element der Ordnung 8. Also ist sie nicht zyklisch.

(d) Finden Sie zwei Untergruppen der Ordnung 4. [4 Punkte]

$$\begin{aligned} U_1 &= \langle 3 \rangle = \{3^1, 3^2, 3^3, 3^4\} = \{3, 9, 7, 1\} \\ U_2 &= \langle 13 \rangle = \{13^1, 13^2, 13^3, 13^4\} = \{13, 9, 17, 1\} \end{aligned}$$

(e) Finden Sie ein $x \in \mathbb{Z}_{20}^*$ mit $x^3 = 3$. [3 Punkte]

Aus b) sieht man sofort, dass $x = 7$ diese Bedingung erfüllt.

Aufgabe 2 [10 Punkte]

In der symmetrischen Gruppe $(S_{10}, \circ)$ seien die folgenden Permutationen definiert:

$$\begin{array}{ll} \sigma_1 & (1\,2\,3) \circ (4\,5\,6\,7\,8) \circ (9\,10), \\ \sigma_2 & (4\,1\,7\,2\,9) \circ (8\,7\,6\,3), \\ \sigma_3 & (1\,4\,5) \circ (7\,9). \end{array}$$

(a) Berechnen Sie σ_1^2. [3 Punkte]

$$\sigma_1^2 = (1\,3\,2) \circ (4\,6\,8\,5\,7)$$

(b) Berechnen Sie $\mathrm{Sign}(\sigma_2)$. [3 Punkte]

$$\mathrm{Sign}(\sigma_2) = (-1)^{4+3} = -1$$

(c) Sei $x \in S_{10}$ die Permutation, für die $\sigma_1 \circ x \circ \sigma_2 = \sigma_3$ gilt. Schreiben Sie x als Produkt von unabhängigen Zykeln. [4 Punkte]

Die Gleichung $\sigma_1 \circ x \circ \sigma_2 = \sigma_3$ ist quivalent zu $x = \sigma_1^{-1} \circ \sigma_3 \circ \sigma_2^{-1}$. Mit

$$\begin{array}{rcl} \sigma_1^{-1} & = & (10\,9) \circ (8\,7\,6\,5\,4) \circ (3\,2\,1) \text{ und} \\ \sigma_2^{-1} & = & (3\,6\,7\,8) \circ (9\,2\,7\,1\,4) \end{array}$$

erhalten wir

$$\begin{array}{rcl} x & = & (10\,9) \circ (8\,7\,6\,5\,4) \circ (3\,2\,1) \circ (1\,4\,5) \circ (7\,9) \circ (3\,6\,7\,8) \circ (9\,2\,7\,1\,4) \\ & = & (1\,4\,6\,10\,9) \circ (2\,7\,8) \circ (3\,5) \end{array}$$

Aufgabe 3 [5 Punkte]

Formulieren Sie den Ergänzungssatz für Vektorräume.

Sei V ein endlich erzeugter K-Vektorraum und $L \subseteq V$ eine endliche, linear unabhängige Teilmenge. Dann gibt es eine Basis B von V mit $L \subseteq B$. Insbesondere ist $|L| \leqslant \dim_K V$.

Aufgabe 4 [5 Punkte]

Geben Sie die Definition eines Körpers an. Sie dürfen hierbei die Definition einer Gruppe als bekannt vorausssetzen.

Eine nichtleere Menge K zusammen mit zwei Verknüpfungen

$$\begin{array}{rl} + & : K \times K \to K \\ \cdot & : K \times K \to K \end{array}$$

heißt ein Körper, wenn
1) $(K, +)$ eine Gruppe ist und $a + b = b + a$ für alle $a, b \in K$,
2) $(K \setminus \{0\}, \cdot)$ eine Gruppe ist und $a \cdot b = b \cdot a$ für alle $a, b \in K \setminus \{0\}$,
3) die Distributivgesetze $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$ und $(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ für alle $a, b, c \in K$ gelten.

Aufgabe 5 [10 Punkte]

(a) In $\mathbb{R}^3$ seien $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, u_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ gegeben. Bestimmen Sie eine Basis des Schnittes von
$\mathcal{L}(v_1, v_2) = \{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 \mid \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}\}$ und
$\mathcal{L}(u_1, u_2) = \{\beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 \mid \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}\}$ an. [7 Punkte]

(b) Bestimmen Sie eine Basis von

$$\mathcal{L}(v_1, v_2) + \mathcal{L}(u_1, u_2). \text{ [3 Punkte]}$$

(a)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(v_1, v_2) \cap \mathcal{L}(u_1, u_2) &= \{\beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 \mid \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R} \text{ und es existieren } \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \\ &\qquad \text{so dass } \beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 = \alpha_1 v_1 + \alpha_1 v_2\}. \end{aligned}$$

Die Gleichung $\beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 = \alpha_1 v_1 + \alpha_1 v_2$ ist äquivalent zu

$$\left\{ \begin{array}{ccccl} \alpha_1 & -\alpha_2 & -3\beta_1 & +\beta_2 & = 0 \\ & -2\alpha_2 & -2\beta_1 & -\beta_2 & = 0 \\ & \alpha_2 & -2\beta_1 & +2\beta_2 & = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccccl} \alpha_1 & -\alpha_2 & -3\beta_1 & +\beta_2 & = 0 \\ & \alpha_2 & -2\beta_1 & +2\beta_2 & = 0 \\ & & -6\beta_1 & +3\beta_2 & = 0 \end{array} \right.$$

Aus der dritten Gleichung folgt, dass $\beta_1 = \frac{\beta_2}{2}$. Also ist

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(v_1, v_2) \cap \mathcal{L}(u_1, u_2) &= \left\{ \beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 \mid \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R} \text{ und } \beta_1 = \frac{\beta_2}{2} \right\} \\
&= \left\{ \frac{\beta_2}{2} u_1 + \beta_2 u_2 \mid \beta_2 \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \left\{ \beta_2 \left(\frac{1}{2} u_1 + u_2 \right) \mid \beta_2 \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \left\{ \beta_2 \begin{pmatrix} 1/2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \mid \beta_2 \in \mathbb{R} \right\}
\end{aligned}$$

Also ist $\left\{ \begin{pmatrix} 1/2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ eine Basis von $\mathcal{L}(v_1, v_2) \cap \mathcal{L}(u_1, u_2)$.

(b) Nach der Dimensionsformel gilt $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{L}(v_1, v_2) + \mathcal{L}(u_1, u_2) =$
$= \dim_{\mathbb{R}} \mathcal{L}(v_1, v_2) + \dim_{\mathbb{R}} \mathcal{L}(u_1, u_2) - \dim_{\mathbb{R}} \mathcal{L}(v_1, v_2) \cap \mathcal{L}(u_1, u_2)$
$= 2 + 2 - 1 = 3$. Also ist $\mathcal{L}(v_1, v_2) + \mathcal{L}(u_1, u_2) = \mathbb{R}^3$. Dann ist zum Beispiel

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

eine Basis.