

Übungen zur Linearen Algebra I (Probeklausur)

1. Geben Sie die komplexe Zahl

$$\alpha = \frac{-74 + 149i}{2 + 3i}$$

in der Darstellung $\alpha = a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ an. Finden Sie auch α^{-1} in dieser Form.

2. Sei \mathcal{S}_4 die symmetrische Gruppe zu der Menge $\{1, 2, 3, 4\}$. Wieviele Lösungen $x \in \mathcal{S}_4$ haben die Gleichungen

$$x^2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad x^2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}?$$

3. Sei $(G, *)$ eine Gruppe und \mathcal{S}_G die symmetrische Gruppe zu der Menge G . Für $g \in G$ sei

$$\Psi_g : G \rightarrow G \quad \text{definiert durch} \quad \Psi_g(x) := g \cdot x \quad (x \in G).$$

Zeigen Sie, dass jedes ψ_g bijektiv ist (und damit in \mathcal{S}_G liegt). Zeigen Sie weiter, dass die Abbildung

$$\Psi : G \rightarrow \mathcal{S}_G, \quad g \mapsto \Psi_g \quad (g \in G)$$

ein injektiver Gruppenhomomorphismus ist.

4. Berechnen Sie den Rang der Matrix

$$T_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix} \in M(4, 4; \mathbb{R}).$$

Wie groß ist die Dimension des Kerns der zu T_4 gehörigen linearen Abbildung. Sei $L \leq \mathbb{R}^4$, der Untervektorraum von \mathbb{R}^4 , der von den Spalten von T_4 erzeugt wird. Ist der Vektor $(1, 2, 3, 4)^t$ in L enthalten?

5. Sei

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \in M(2, 3; \mathbb{R})$$

und $\varphi := \Phi_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\varphi(x) := A \cdot x$ die zugehörige lineare Abbildung von \mathbb{R}^3 nach \mathbb{R}^2 . Finden Sie Basen \mathbf{B}_3 von \mathbb{R}^3 und \mathbf{B}_2 von \mathbb{R}^2 sodass

$$M(\mathbf{B}_2, \mathbf{B}_3; \varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ist.}$$

Bitte wenden!

6. In der Vorlesung haben wir die Menge der Abbildungen $V := \text{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ durch die punktweisen Operationen zu einem \mathbb{R} -Vektorraum gemacht. Welche der folgenden Mengen sind Untervektorräume dieses Vektorraums?

- $U_1 := \{ f \in V \mid f(1) = c \}, \quad c \in \mathbb{R} \text{ fest.}$
- $U_2 := \{ f \in V \mid f \text{ hat mindestens eine Nullstelle} \}.$
- $U_2 := \{ f \in V \mid f(x^2) = 2f(x) \}.$

7. Bestimmen sie die Lösungsmenge des folgenden reellen linearen Gleichungssystems in Abhängigkeit von $\beta \in \mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rccccrcr} \beta x_1 & - & & 2x_2 & - & x_3 & = & 0, \\ 2\beta x_1 & + & (\beta - 2)x_2 & - & x_3 & = & 1, \\ 3\beta x_1 & - & & 4x_2 & - & 2x_3 & = & 2, \\ -5\beta x_1 & + & & 6x_2 & - & 4x_3 & = & -4. \end{array}$$

8. Seien

$$T := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \quad \tilde{T} := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{pmatrix} \in M(3, 3; \mathbb{R}).$$

Zeigen Sie, dass T nicht invertierbar ist. Zeigen Sie auch, dass \tilde{T} invertierbar ist und berechnen Sie die zu \tilde{T} inverse Matrix.

Abgabe: –