

Übungen zur Linearen Algebra I

1. Zeigen Sie, dass es eine lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit

$$\varphi \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad \varphi \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

gibt. Gibt es eine solche lineare Abbildung, deren Kern 2-dimensional ist?

2. Sei $(K; +, \cdot)$ ein Körper mit K -Vektorräumen U, V und $\varphi : U \rightarrow V$ eine bijektive lineare Abbildung. Zeigen Sie, dass die inverse Abbildung φ^{-1} auch linear ist.
3. Sei

$$T := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \in M(3, 3; \mathbb{R}).$$

Betrachten Sie die Abbildung

$$\Psi_T : M(3, 3; \mathbb{R}) \rightarrow M(3, 3; \mathbb{R}), \quad \Psi_T(X) := T \cdot X \quad (X \in M(3, 3; \mathbb{R}))$$

Zeigen Sie, dass Ψ_T linear ist. Sei B die Standard-Basis des \mathbb{R} -Vektorraums $M(3, 3; \mathbb{R})$ und berechnen Sie die Matrix $\mathbf{M}(B, B; \Psi_T)$. Finden Sie ausserdem die Dimension des Kerns von Ψ_T .

4. Betrachten Sie die folgenden Matrizen (mit Eingängen in den rationalen Zahlen) und bilden Sie alle Produkte aus diesen, die möglich sind:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ -1 & -2 & 5 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Abgabe: Montag 25. Januar 11.00