Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität
Düsseldorf
Prof. Dr. F. Grunewald

WS 2009/10
14. Dezember 2009
Blatt 9

Übungen zur Linearen Algebra I

1. (a) Geben Sie die komplexe Zahl
$$\alpha = \frac{-11+13i}{1+2i}$$
in der Darstellung $\alpha = a + bi$ mit $a,\ b \in \mathbb{R}$ an.

   (b) Wieviele Elemente hat die Menge
$$\left\{ \left(\frac{1-\sqrt{3}i}{2} \right)^n \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\} \subset \mathbb{C}?$$

2. Sei $(K;+,\cdot)$ ein Körper und V ein K-Vektorraum mit Untervektorräumen $V_1,\ V_2 \subseteq V$. Zeigen Sie, daß
$$V_1 + V_2 := \{\, v_1 + v_2 \mid v_1 \in V_1,\ v_2 \in V_2 \,\}$$
auch ein Untervektorraum von V ist.

3. Seien
$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \qquad v_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}, \qquad e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^3.$$
Gibt es $\lambda_1,\ \lambda_2 \in \mathbb{Q}$ mit $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = v_3$? Gibt es $\lambda_1,\ \lambda_2 \in \mathbb{Q}$ mit $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = e_1$?

4. Sei $(K;+,\cdot)$ ein Körper. Für $\lambda_1,\ \lambda_2 \in K$ sei
$$U_{(\lambda_1,\lambda_2)} := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in K^2 \,\middle|\, \lambda_1 x + \lambda_2 y = 0 \right\}.$$
Seien jetzt $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \mu_1,\ \mu_2 \in K$, so dass $(\lambda_1,\lambda_2) \neq (0,0)$ und $(\mu_1,\mu_2) \neq (0,0)$ gelten. Zeigen Sie, dass
$$U_{(\lambda_1,\lambda_2)} = U_{(\mu_1,\mu_2)}$$
genau dann richtig ist wenn es ein $a \in K$ mit
$$\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} = a \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$$
gibt.

Abgabe: Montag 21. Dezember 11.00