Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität
Düsseldorf
Prof. Dr. F. Grunewald

WS 2009/10
7 Dezember 2009
Blatt 8

Übungen zur Linearen Algebra I

1. Sei $(R, +, \cdot)$ ein kommutaiver Ring mit Einselement. Definieren Sie auf der Menge $R_{\mathbb{C}} := R \times R$ eine Addition und eine Multiplikation durch folgende Formeln:

   $$(a, b)+(c, d) := (a+c, b+d), \quad (a, b)\cdot(c, d) := (a\cdot c-b\cdot d, a\cdot d+b\cdot c) \qquad (a,\ b,\ c,\ d \in R).$$

   Zeigen Sie, daß $(R_{\mathbb{C}}, +, \cdot)$ wieder ein kommutativer Ring mit Einselement ist. Der Ring $(R_{\mathbb{C}}, +, \cdot)$ heisst *Komplexifizierung* des kommutativen Ringes $(R, +, \cdot)$.

2. Zeigen Sie, daß $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}_{\mathbb{C}}$ ein Körper mit 9 Elementen ist und daß $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}_{\mathbb{C}}$ kein Körper ist.

3. Sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper. Ein Polynom $P(x) \in K[x]$ heisst *irreduzibel* falls P die folgenden Eigenschaften hat.

   (a) $\mathrm{grad}(P) \geq 1$,

   (b) gilt $P = RS$ mit R, $S \in K[x]$ so folgt $\mathrm{grad}(R) = 0$ oder $\mathrm{grad}(S) = 0$.

   Zeigen Sie, dass jedes Polynom vom Grad eins irreduzibel ist. Geben Sie über den Körpern $\mathbb{Q}$, , $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ jeweils ein irreduzbles Polynom vom Grad 2 an.

4. Sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper und $P(x) \in K[x]$ ein Polynom vom Grad grösser oder gleich eins. Zeigen Sie, dass folgende Bedingungen an P äquivalent sind.

   (a) es gibt ein Polynom $Q(x) \in K[x]$ vom Grad eins, das P teilt.

   (b) es gibt ein $a \in K$ mit $P(a) = 0$, das heisst P hat eine Nullstelle in K.

Abgabe: Montag 14. Dezember 11.00