Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität
Düsseldorf
Prof. Dr. F. Grunewald

WS 2009/10
9. November 2009
Blatt 4

# Übungen zur Linearen Algebra I

1. Sei $(G, *)$ eine Gruppe und $U \leq G$ eine Untergruppe. Sei weiter $g \in G$. Die Menge
$$g * U := \{ g * u \mid u \in U \} \subset G$$
heisst Nebenklasse von $U$ in $G$ mit dem Vertreter $g$. Beweisen Sie
   (a) Es gilt $U = g * U$ genau dann wenn $g \in U$ gilt.
   (b) Es gilt $U \cap g * U \neq \emptyset$ genau dann wenn $g \in U$ gilt.
   (c) Seien $g_1,\, g_2 \in G$. Es gilt $g_1 * U \cap g_2 * U \neq \emptyset$ genau dann wenn $g_1^{-1} * g_2 \in U$ gilt.
   (d) Sei $r \in \mathbb{N}$ und $g_1, \dots g_r \in G$, weiter sei auch $g \in G$. Es gilt $(g_1 * U \cup \ldots \cup g_r * U) \cap g * U \neq \emptyset$ genau dann wenn es ein $i \in \{ 1, \dots, r \}$ mit $g_i^{-1} * g \in U$ gibt.

2. Sei $(G, *)$ eine Gruppe und $g_1,\, g_2 \in G$. Beweisen Sie:
   (a) Für alle $g_1,\, g_2,\, g_3,\, g_4 \in G$ gilt $(g_1 * g_2) * (g_3 * g_4) = g_1 * (g_2 * (g_3 * g_4))$.
   (b) Für $g_1,\, g_2 \in G$ gilt $(g_1 * g_2)^{-1} = g_2^{-1} * g_1^{-1}$.

3. Sei $(G, *)$ eine Gruppe. Das Zentrum von $G$ ist:
$$\mathbf{Z}(G) := \{ x \in G \mid \text{es gilt } x * y = y * x \text{ für alle y} \in \text{G} \} \subset \text{G}.$$
Zeigen Sie, dass $\mathbf{Z}(G)$ eine Untergruppe von $G$ ist. Bestimmen Sie außerdem das Zentrum der symmetrischen Gruppe $\mathcal{S}_4$.

4. Sei $(G, *)$ eine Gruppe und $\mathcal{S}_G$ die symmetrische Gruppe zu der Menge $G$. Für $g \in G$ sei
$$\Psi_g : G \to G \qquad \text{definiert durch} \qquad \Psi_g(x) := gxg^{-1} \quad (x \in G).$$
Zeigen Sie, dass jedes $\psi_g$ bijektiv ist (und damit in $\mathcal{S}_G$ liegt). Zeigen Sie weiter, dass die Abbildung
$$\Psi : G \to \mathcal{S}_G, \qquad g \mapsto \Psi_g \quad (g \in G)$$
ein Gruppenhomomorphismus ist.

**Abgabe:** Montag 16. November 11.00