Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität
Düsseldorf
Prof. Dr. F. Grunewald

WS 2009/10
2. November 2009
Blatt 3

Übungen zur Linearen Algebra I

1. Seien n, m natürliche Zahlen mit der Eigenschaft $m \leq n$. Der Binomialkoeffizient zu n, m sei wie in Aufgabe 4 von Blatt 2 durch
$$\begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix} := |\mathcal{P}_m(\{1, \ldots, n\})|$$
definiert. Wir erweitern diese Definition noch durch
$$\begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} := |\mathcal{P}_0(\{1, \ldots, n\})| = 1.$$
Sei jetzt $m < n$ vorausgesetzt. Zeigen Sie, dass
$$\begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n-1 \\ m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n-1 \\ m-1 \end{pmatrix}$$
gilt und berechnen Sie $\begin{pmatrix} 17 \\ k \end{pmatrix}$ für $k = 0, 1, \ldots 17$.

2. Seien a, $b \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, durch vollständige Induktion, dass
$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} a^{n-k} b^k$$
gilt.

3. Sei $(G, *)$ eine Gruppe. mit neutralem Element e_G. Eine Teilmenge $U \subset G$ heisst Untergruppe falls folgende Eigenschaften erfüllt sind:
   - $e_G \in U$,
   - sind g, $h \in U$ dann gilt auch $g * h \in U$,
   - ist $g \in U$ dann gilt auch $g^{-1} \in U$.

   Bestimmen Sie alle Untergruppen der symmetrischen Gruppe $\mathcal{S}_3$.

4. Geben Sie alle Elemente der folgenden Teilmenge der symmetrischen Gruppe $\mathcal{S}_4$ an.
$$M := \{\, g \in \mathcal{S}_4 \mid g^2 = \mathrm{id}_{\{1,2,3,4\}} \,\}.$$

Abgabe: Montag 9. November 11.00