Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine Universität
Düsseldorf
Apl. Prof. Dr. Axel Grünrock
Joseph Adams M.Sc.

SoSe 2022
19.09.2022

Klausur zur Analysis I

Bitte die nächsten beiden Zeilen unbedingt ausfüllen!

Name, Vorname: ......MUSTERLÖSUNG......

Matrikelnummer: ....

Allgemeine Hinweise: Als Hilfsmittel erlaubt sind (außer Kugelschreiber und Papier) lediglich ein beidseitig beschriebenes DIN A4 Blatt mit Notizen. Die Klausur ist auf den ausgeteilten Formularen zu bearbeiten, und nur diese sind abzugeben. Am Ende sind drei Bogen Schmierpapier angeheftet, sollte dies nicht ausreichen, können Sie noch eigenes benutzen, was aber nicht eingesammelt wird. Die Aufgabenverteilung ist die folgende:

A1 (Multiple Choice, bitte auf dem Blatt ankreuzen)	10 Punkte
A2 (Komplexe Zahlen)	7 Punkte
A3 (Grenzwerte)	9 Punkte
A4 (Krümmungsverhalten der Umkehrfunktion)	9 Punkte
A5 (Konvergenz von Reihen)	8 Punkte
A6 (Mittelwertsatz und Anwendungen)	10 Punkte
A7 (Kurvendiskussion)	10 Punkte

Die Klausur gilt für Mathematiker mit 30 (von 63 erreichbaren) Punkten als bestanden, für Nebenfächler mit 24 Punkten. Viel Erfolg!

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	Σ	Note
Punkte/Note									

Aufgabe 1 (10 Punkte) Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen stets richtig oder im Allgemeinen falsch sind. Hier sind nur die Antworten "richtig", "falsch" oder Enthaltungen möglich. Bitte auf dem Aufgabenblatt ankreuzen!

(a) Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge, so konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
Antwort: richtig ○ falsch ⊗ Enthaltung ○ **(2/1/0 P.)**

(b) Jede beschränkte Folge besitzt höchstens endlich viele Häufungswerte.
Antwort: richtig ○ falsch ⊗ Enthaltung ○ **(2/1/0 P.)**

(c) Eine stetige und beschränkte Funktion $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ nimmt ihr Maximum an.
Antwort: richtig ○ falsch ⊗ Enthaltung ○ **(2/1/0 P.)**

(d) Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $|f'(x)| \leq 3$ für alle $x \in [a,b]$, so ist f Lipschitz-stetig.
Antwort: richtig ⊗ falsch ○ Enthaltung ○ **(2/1/0 P.)**

(e) Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar und $f(x) \neq 0$ für alle $x \in [a,b]$ so ist auch $\frac{1}{f}$ integrierbar.
Antwort: richtig ○ falsch ⊗ Enthaltung ○ **(2/1/0 P.)**

Rechnen mit komplexen Zahlen.

Aufg. 2: (a) Stellen Sie die folgenden komplexen Zahlen in der Form $a+ib$ mit $a,b\in\mathbb{R}$ dar: $(2+2)+3=7$ P.

(i) $\dfrac{4-2i}{3+i}$ (ii) $e^{i\frac{\pi}{4}}$

(b) Geben Sie (ohne Beweis) alle komplexen Lösungen der Gleichung $z^3=1$ in der Form $a+ib$ mit $a,b\in\mathbb{R}$ an.

Lös.: (a) (i) $\dfrac{4-2i}{3+i}=\underbrace{\dfrac{4-2i}{3+i}\,\dfrac{3-i}{3-i}}_{1P.}=\dfrac{1}{10}(4-2i)(3-i)=\dfrac{1}{10}(12-2-6i-4i)$

$=\dfrac{1}{10}(10-10i)=1-i$ 1P.

(ii) $e^{i\frac{\pi}{4}}=\underbrace{\cos(\tfrac{\pi}{4})+i\sin(\tfrac{\pi}{4})}_{1P.}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$ 1P.

(b) $z^3=1 \Leftrightarrow 0=z^3-1=(z-1)\cdot(z^2+z+1)$

$\Leftrightarrow \underbrace{z=1}_{1P.} \vee z^2+z+1=0$

Letzteres ist g.d. der Fall, w. $z\in\left\{-\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}-1}\right\}=\left\{-\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$ 2P.

Hier sind natürlich auch andere Lösungswege möglich, z.B. ist in der Vorl. besprochen worden, dass die n-ten Einheitswurzeln geg. sind durch $z_k=e^{2\pi ik/n}$, $k\in\{0,\dots,n-1\}$. Also $z_k=\cos(\frac{2\pi k}{3})+i\sin(\frac{2\pi k}{3})$, $k\in\{0,1,2\}$. Das sollte aber noch nicht die volle Punktzahl bringen.

(Grundsätzlich: Jede richtige Lösung 1P.)

Aufg. 3: Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte: $\cancel{1}+2+3+3=\cancel{10}$ 9

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2+\frac{3}{x}}{1+\frac{2}{x}}$; (b) $\lim\limits_{x\to 0} x^2\left(\left(\left(\frac{1}{x}+1\right)^5-\left(\frac{1}{x}-1\right)^3\right)\right)$

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(2x)\tan(4x)}{x^2}$; (d) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\sqrt{1+x}\right)^{\frac{1}{x}}$.

Lös.: (a) $\dfrac{2+\frac{3}{x}}{1+\frac{2}{x}} = \dfrac{2x+3}{x+2} \longrightarrow \dfrac{3}{2} \quad (x\to 0)$ (Geht auch mit l'Hospital)

(b) $x^2\left(\left(\left(\frac{1}{x}+1\right)^3-\left(\frac{1}{x}-1\right)^3\right)\right) = x^2\left(\frac{1}{x^3}+\frac{3}{x^2}+\frac{3}{x}+1-\frac{1}{x^3}+\frac{3}{x^2}-\frac{3}{x}+1\right)$

$= x^2\left(\frac{6}{x^2}+2\right) = 6+2x^2 \longrightarrow 6 \quad (x\to 0)$

(c) $\ldots = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(2x)}{x} \cdot \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan(4x)}{x}$ 1P.

$= \dfrac{d}{dx} \sin(2x)\Big|_{x=0} \cdot \dfrac{d}{dx} \tan(4x)\Big|_{x=0}$ 1P.

$= 2\cdot\cos(0)\cdot 4\cdot\dfrac{1}{\cos^2(0)} = 8$ 1P.

(d) $\left(\sqrt{1+x}\right)^{\frac{1}{x}} = (1+x)^{\frac{1}{2x}} = \exp\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x}\ln(1+x)\right)$ 1P.

wobei $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x}\ln(1+x) = \dfrac{d}{dx}\ln(1+x)\Big|_{x=0} = 1$ 1P.

Mit der Stetigkeit der e-Funktion folgt

$\lim\limits_{x\to 0} \left(\sqrt{1+x}\right)^{\frac{1}{x}} = \sqrt{e}$. 1P.

Aufg. 4 : Es sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar mit $f'(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. $1+4+4 = 9$ P.

(a) Geben Sie die Formel für die Ableitung der Umkehrfunktion $f^{-1}: f(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ an.

(b) Begründen Sie (mit einem Stichwort), dass f^{-1} zweimal differenzierbar ist, und zeigen Sie die Identität

$$(f^{-1})''(y) = \frac{-1}{(f'(f^{-1}(y)))^3} \cdot f''(f^{-1}(y)).$$

(c) Was können Sie mit Hilfe des Konvexitätssatzes über das Krümmungsverhalten von f^{-1} aussagen, wenn

(i) f monoton steigend und konvex bzw.

(ii) f monoton fallend und konkav ist.

Lös.: (a) $$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$ 1P.

(b) Folgt aus (a) und der Kettenregel. 1P.

Deren Anwendung ergibt

$$(f^{-1})''(y) = \frac{d}{dy} \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{-1}{(f'(f^{-1}(y)))^2} \cdot \frac{d}{dy} f'(f^{-1}(y))$$ 1P.

$$= -\frac{1}{(f'(f^{-1}(y)))^2} \cdot f''(f^{-1}(y)) \cdot (f^{-1})'(y)$$ 1P.

Forts. Lös. A4:

Setzt man für den letzten Faktor nochmal (a) ein, so ergibt sich die Beh. 1P.

(c) In (i) ist $f' \geq 0$ und $f'' \geq 0$, also 1P.

also nach (b) $(f^{-1})'' \leq 0$ und damit f^{-1} konkav. 1.

In (ii) ist f^{-1} ebenfalls konkav 1P.

Hier ist $f' \leq 0$, $f'' \leq 0$ und nach (b) $(f^{-1})'' \leq 0$ 1P.

(3+3+2=8 P.)

Aufg. 5: Für welche Werte des Exponenten $\alpha \in [0,\infty)$ konvergieren bzw. divergieren die nachstehenden Reihen? In welchen Fällen ist die Konvergenz absolut? Begründen Sie Ihre Antworten durch Angabe eines passenden Konvergenzkriteriums, einer geeigneten Majorante o.ä..

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$; (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in\alpha}}{\sqrt{n}}$; (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{n^{\alpha n}}$.

Lös.: (a) Für $\alpha > 0$ gilt $n^{-\alpha} \searrow 0$, so dass die Reihe nach Leibniz konvergiert. 1P.

Divergenz für $\alpha = 0$ (keine Nullfolge) 1P.

Die Konvergenz ist absolut g.d.w. $\alpha > 1$. 1P.

(Vorl.: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ konv. g.d.w. $\alpha > 1$.)

(b) Für alle $\alpha \in [0,\infty)$ ist die Reihe nicht absolut konvergent, da $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \infty$ (Vorl.). 1P.

Aus demselben Grund divergiert die Reihe für $\alpha \in 2\pi\mathbb{N}_0$. 1

Für $\alpha \in [0,\infty) \setminus 2\pi\mathbb{N}_0$ konvergiert die Reihe aufgrund des verallgemeinerten Leibniz-Kriteriums. 1P.

(c) Die Reihe konvergiert absolut für $\alpha \geq 1$, da 1P.

$$\frac{n!}{n^{\alpha n}} \leq \frac{n!}{n^n} \leq \frac{2}{n^2}.$$

Sie divergiert für $\alpha \in [0,1)$, weil $\frac{(n+1)!}{(n+1)^{\alpha(n+1)}} \cdot \frac{n^{\alpha n}}{n!}$

$$= (n+1)^{1-\alpha} \left(\left(\frac{n}{n+1} \right)^n \right)^\alpha \geq \frac{(n+1)^{1-\alpha}}{e^\alpha}.$$ Die Summanden bilden also keine Nullfolge. 1P. (Alt.: Quotientenkrit.)

Aufg. 6 Geben Sie den MWS (der Differentialrechnung) genau an. 2P.

Ja, das ist doch eine gelungene 10 P.-Aufgabe
$\boxed{2+2+3+3 \text{ P.}}$

Zeigen Sie:

(a) Ist $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f: I \to \mathbb{R}$ differenzierbar, und ~~so~~ $f'(x) = 0$ für alle $x \in I$, so ist f konstant. 2P.

(b) Für alle $x > 0$ ist

$$\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

3P.

(c) Ist $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Lösung der Funktionalgleichung

$$f(x+y) = f(x) + f(y),$$

3P.

so ist f linear.

Lös: • $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, diffbar auf (a,b). Dann ex. 1P.

$\xi \in (a,b)$: $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi)$.

(a) $f(x) - f(y) \overset{\text{MWS}}{=} f'(\xi)(x-y) = 0 \quad \forall x,y \in I$

mit einem $\xi \in (x,y)$. 1P $\Rightarrow f(x) = f(y) \ \forall x,y \in I$,

d.h. f ist konstant. 1P.

(b) Für $f(x) := \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$ ist

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \ldots = 0,$$ 2P.

also nach (a): f konst.

Aus $\arctan(0) = 0$ und $\lim_{x \to \infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$

oder $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$ folgt die Beh. 1P.

(c) $\longrightarrow$

(c) $f'(x+y) = f'(x) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$.

Also gibt es $c \in \mathbb{R}$, so dass $f'(x) = c \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Setze $g(x) = f(x) - cx \implies g'(x) = 0$, nach (a): g konstant. 2P.

Aus $f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0)$ folgt $f(0) = g(0) = 0$ und

daher $f(x) = cx$. 1P.

Aufg. 7 Für $x \in \mathbb{R}$ sei $f(x) = x^3 + x^2 - x - 1$. $2+3+3+1+1 = 10$ (P.)

(a) Bestimmen Sie alle Nullstellen von f. ~~und die (möglicherweise uneigentlichen) Grenzwerte $\lim_{x \to \pm\infty} f(x)$.~~

(Nullstellenmenge $\{\pm 1\}$ 2P.)

~~$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ 1P.~~

(b) Berechnen Sie ~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~ die Ableitung $f'(x)$ und alle kritischen Stellen von f.

($f'(x) = 3x^2 + 2x - 1$ 1P.

$f'(x) = 0 \iff x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{1}{3} = 0 \iff x \in \left\{-\frac{1}{3} \pm \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{3}{9}}\right\}$

$= \left\{-\frac{1}{3} \pm \frac{2}{3}\right\} = \left\{-1, \frac{1}{3}\right\}$ 2P.)

(c) Handelt es sich dabei um lokale Extremstellen? Wenn ja, welchen Typs?

($f''(x) = 6x + 2 \gtreqless 0 \iff x \gtreqless -\frac{1}{3}$ 1P.

bei $x_{max} = -1$ liegt ein lokales Maximum und 1P.

bei $x_{min} = \frac{1}{3}$ " " " Minimum vor 1P.)

(d) ~~[illegible]~~ Nimmt f ein globales Extremum an? (*)

(e) Bestimmen Sie das größte (möglicherweise uneigentliche) Intervall, auf dem f konkav ist.

($I = (-\infty, -\frac{1}{3}]$ 1P.)

(*) (Wenn ja, wo? ~~Wenn~~ Wenn nein, warum nicht?)

(Antwort: Nein, da $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ 1P.)