Mathematisches Institut
Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 23/24

Klausur zur Vorlesung Lineare Algebra I

Zweite Klausur am 26. März 2024

Name:

Vorname:

Matrikelnummer:

Studiengang:

- Einziges erlaubtes Hilfsmittel: Ein DIN-A4-Blatt handschriftliche Notizen.
- Anderes mitgebrachte Papier, Bücher, elektronische Geräte etc. bleiben während der gesamten Prüfung verstaut.
- Legen Sie einen Lichtbildausweis sichtbar aus und tragen Sie oben Ihre Daten ein.
- Schreiben Sie auf jedes abgegebene Blatt Ihren Namen.
- Begründen Sie Ihre Antworten.
- Pro Aufgabe sind 10 Punkte erreichbar.
- Bearbeitungszeit: 120 Minuten.

1	2	3	4	5	Summe	Note

Aufgabe 1. Bringen Sie die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 8 & 30 & -30 \\ -2 & 1 & -2 & 7 & -3 \\ 4 & -2 & -5 & -26 & 24 \\ 10 & -5 & 13 & -31 & 9 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{4\times 5}(\mathbb{Q})$$

mit dem Gauß-Algorithmus in reduzierte Zeilen-Stufen-Form, lesen Sie den Rang der Matrix ab, und geben Sie die Dimension von $\mathrm{Ker}(A)$ an.

Aufgabe 2. Sei $V = \mathcal{C}([0, 2\pi])$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller stetigen Funktionen $[0, 2\pi] \to \mathbb{R}$. Wir fassen die Vorschriften

$$f(x) = 1 - x^3 \quad \text{und} \quad g(x) = \cos(x)$$

als Vektoren in V auf. Skizzieren Sie die Graphen der Funktionen, und bestimmen Sie die Dimension des Untervektorraumes $U = \mathbb{R}f + \mathbb{R}g$.

Aufgabe 3. Sei $V \subset \mathrm{Mat}_2(\mathbb{C})$ der Untervektorraum aller 2×2-Matrizen mit Spur Null. Wir betrachten die Matrix $S = \left(\begin{smallmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{smallmatrix}\right)$ aus $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ und den resultierenden Endomorphismus

$$f : V \longrightarrow V, \quad A \longmapsto SAS^{-1}$$

Berechnen Sie S^{-1}, wählen Sie eine Basis von V, stellen Sie die Matrix von f bezüglich dieser Basis auf, und bestimmen Sie $\det(f) \in \mathbb{C}$.

Aufgabe 4. Sei $i \in \mathbb{C}$ die imaginäre Zahl, V ein $\mathbb{C}$-Vektorraum und $a_1, \ldots, a_n \in V$ eine Basis. Beweisen Sie, dass die $2n$ Vektoren

$$a_1, \ldots, a_n, ia_1, \ldots, ia_n$$

eine Basis von V bilden, wobei wir nun V als $\mathbb{R}$-Vektorraum auffassen.

Aufgabe 5. Sei k ein Körper. Wir betrachten den Endomorphismus

$$f : \mathrm{Mat}_2(k) \longrightarrow \mathrm{Mat}_2(k), \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} c & a \\ d & b \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie das charakteristische Polynom $\chi_f(T) \in k[T]$, und entscheiden Sie für die Körper $k = \mathbb{C}$ sowie $k = \mathbb{R}$ und $k = \mathbb{F}_2$, ob der Endomorphismus diagonalisierbar ist.