Mathematisches Institut
Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 23/24

Klausur zur Vorlesung Lineare Algebra I

Erste Klausur am 7. Februar 2024

Name:

Vorname:

Matrikelnummer:

Studiengang:

- Einziges erlaubtes Hilfsmittel: Ein DIN-A4-Blatt handschriftliche Notizen.
- Anderes mitgebrachte Papier, Bücher, elektronische Geräte etc. bleiben während der gesamten Prüfung verstaut.
- Legen Sie einen Lichtbildausweis sichtbar aus und tragen Sie oben Ihre Daten ein.
- Schreiben Sie auf jedes abgegebene Blatt Ihren Namen.
- Begründen Sie Ihre Antworten.
- Pro Aufgabe sind 10 Punkte erreichbar.
- Bearbeitungszeit: 120 Minuten.

1	2	3	4	5	Summe	Note

Aufgabe 1. Zeigen Sie, dass die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 0 & -3 & 7 \\ -14 & 7 & -1 \\ 6 & -3 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{F}_p)$$

für alle $p \geq 5$ invertierbar ist, und bestimmen Sie für diese Primzahlen mit dem Gauß-Algorithmus die inverse Matrix A^{-1}, unter Verwendung der Kehrwerte $1/2, 1/3 \in \mathbb{F}_p$.

Aufgabe 2. Sei K ein Körper, und $V \subset K[X]$ der Untervektorraum aller Polynome der Form $P(X) = \sum_{i=0}^{4} \alpha_i X^i$. Wir betrachten den Endomorphismus

$$f : V \longrightarrow V, \quad P(X) \longmapsto P'(X-7).$$

Stellen Sie die Matrix A bezüglich der Standardbasis $X^0, \ldots, X^4$ auf, berechnen Sie das charakteristische Polynom $\chi_f(T)$, und bestimmen Sie das Spektrum $\sigma(f)$.

Aufgabe 3. Entscheiden Sie, ob die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ -20 & -2 & -4 \\ -12 & -2 & -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{Q})$$

diagonalisierbar ist.

Aufgabe 4. Sei $U \subset \mathrm{Mat}_3(\mathbb{C})$ der reelle Untervektorraum aller komplexen 3×3-Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix} \quad \text{für die gilt} \quad {}^tA = -\begin{pmatrix} \overline{a} & \overline{b} & \overline{c} \\ \overline{d} & \overline{e} & \overline{f} \\ \overline{g} & \overline{h} & \overline{k} \end{pmatrix}.$$

Stellen sie eine Basis $A_1, \ldots, A_n \in U$ auf, und zeigen Sie damit $\dim_{\mathbb{R}}(U) = 9$.

Aufgabe 5. Sei K ein Körper, $A \in \mathrm{Mat}_n(K)$ eine Matrix, und $U \subset \mathrm{Mat}_n(K)$ ein Untervektorraum mit $\dim(U) \leqslant n^2 - 2$, der A nicht enthält. Zeigen Sie, dass es einen Untervektorraum $H \subset \mathrm{Mat}_n(K)$ gibt mit den Eigenschaften:

$$U \subset H \quad \text{und} \quad A \in H \quad \text{und} \quad \dim_K(H) = n^2 - 1.$$