Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer WS 23/24

Übungen zu Lineare Algebra I

Blatt 12

Aufgabe 1. Sei $n \geq 2$. Berechnen Sie mittels der Definition

$$\operatorname{sgn}(\sigma) = \prod \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j}$$

das Signum der Permutation

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n-2 & n-1 & n \\ 2 & 3 & \ldots & n-1 & n & 1 \end{pmatrix} \in S_n.$$

Aufgabe 2. Benutzen Sie die Jägerzaun-Regel, um den linearen Term im charakteristischen Polynom $\chi_A(T) = \det(TE - A)$ zur 3×3-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix}$$

zu bestimmen.

Aufgabe 3. Wie betrachten die ganzzahlige Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 12 & -3 \\ 4 & 9 & -2 \\ 12 & 32 & -5 \end{pmatrix}.$$

(i) Bestimmen Sie das Spektrum $\sigma(A) \subset \mathbb{C}$, indem Sie durch Probieren eine Wurzel des charakteristischen Polynoms $\chi_A(T)$ finden und dann Polynomdivision durchführen.

(ii) Entscheiden Sie mit den geometrischen Multiplizitäten $m_\lambda \geq 1$ der Eigenwerte, ob $A \in \operatorname{Mat}_3(\mathbb{C})$ diagonalisierbar ist.

Aufgabe 4. Sei K ein Körper von Charakteristik $p \geq 0$, und $V = \mathrm{Mat}_2(K)$ der Vektorraum aller 2×2-Matrizen. Wir betrachten den Endomorphismus

$$f : V \longrightarrow V, \quad B \longmapsto {}^tB,$$

welcher die Matrix $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ auf die transponierte Matrix $\left(\begin{smallmatrix} a & c \\ b & d \end{smallmatrix}\right)$ schickt.

(i) Beschreiben Sie $f \in \mathrm{End}_K(V)$ durch eine Matrix $A \in \mathrm{Mat}_4(K)$.

(ii) Berechnen Sie das charakteristische Polynom $\chi_A(T)$.

(iii) Bestimmen Sie die geometrischen Multiplizitäten und folgern Sie, dass f diagonalisierbar ist genau dann, wenn $p \neq 2$.

Abgabe: Bis Montag, den 22. Januar um 10:25 Uhr im Zettelkasten.

Erlaubtes Hilfsmittel bei den Klausuren: Ein DIN-A4-Blatt handschriftliche Notizen.