Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer WS 23/24

Übungen zu Lineare Algebra I

Blatt 11

Aufgabe 1. Seien $A, B \in \mathrm{Mat}_2(K)$ diagonalisierbar. Beweisen oder widerlegen Sie:

(i) Die Summe $A + B$ ist diagonalisierbar.

(ii) Das Produkt $A \cdot B$ ist diagonalisierbar.

(iii) Die Potenzen A^n, $n \geq 0$ sind diagonalisierbar.

Aufgabe 2. Sei $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ eine 2×2-Matrix über dem Körper K.

(i) Verifizieren Sie für $K = \mathbb{R}$ und A *symmetrisch*, also $c = b$, dass A diagonalisierbar ist.

(ii) Zeigen Sie durch ein Gegenbeispiel, dass dies für den Körper $K = \mathbb{C}$ nicht mehr stimmt.

(iii) Beweisen Sie für $K = \mathbb{C}$ und A *hermitesch*, also $a, d \in \mathbb{R}$ und $c = \bar{b}$, dass A diagonalisierbar sein muss.

Aufgabe 3. Sei V ein n-dimensionaler K-Vektorraum, und $f : V \to V$ ein Endomorphismus. Zeigen Sie, dass die Potenzen

$$\mathrm{id}_V, f, f^2, \ldots, f^{n^2} \in \mathrm{End}_K(V)$$

linear abhängig sein müssen. Folgern Sie, dass es ein nicht-verschwindendes Polynom $P(T) = \sum_{i=0}^r \alpha_i T^i$ gibt so, dass $P(f) = \sum_{i=1}^r \alpha_i f^i$ die Nullabbildung ist.

Aufgabe 4. Sei V ein K-Vektorraum. Zeigen Sie, dass V endlich-dimensional ist genau dann, wenn jede aufsteigende Kette

$$U_0 \subset U_1 \subset U_2 \subset \dots$$

von Untervektorräumen *stationär* ist, also $U_r = U_{r+1} = \dots$ für ein $r \geq 0$.

Abgabe: Bis Montag, den 15. Januar um 10:25 Uhr im Zettelkasten.