Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer WS 23/24

Übungen zu Lineare Algebra I

Blatt 10

Aufgabe 1. Sei $\omega = \sqrt{2}$. Verifizieren Sie mit dem Gauß-Algorithmus, dass die reelle 3×3-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2\omega & 2-2\omega & 3+15\omega \\ 2 & -2 & 9 \\ 0 & \omega & 6 \end{pmatrix}$$

invertierbar ist, und berechnen Sie die inverse Matrix. Überprüfen Sie ihr Ergebnis, indem Sie im Matrizenprodukt $A \cdot A^{-1}$ zwei Einträge Ihrer Wahl explizit ausrechnen.

Aufgabe 2. Sei K ein Körper von Charakteristik $p \geq 0$. Wir betrachten den vierdimensionalen Vektorraum $V = \mathrm{Mat}_2(K)$ und den Transponierungs-Automorphismus

$$f : V \longrightarrow V, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie alle Eigenwerte $\lambda \in K$ sowie zugehörige Eigenvektoren $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$. Unterscheiden Sie dabei den Fall $p \neq 2$ sowie $p = 2$.

Aufgabe 3. Sei $V \neq 0$ und $f \in \mathrm{End}_K(V)$ ein *nilpotenter* Endomorphismus, also $f^r = 0$ für ein $r \geq 0$. Zeigen Sie, dass das Spektrum $\sigma(f) \subset K$ nur aus dem Eigenwert $\lambda = 0$ besteht. Folgern Sie, dass $f : V \to V$ genau dann diagonalisierbar ist, wenn es die Nullabbildung ist.

Aufgabe 4. Benutzten Sie das charakteristische Polynom $\chi_A(T)$, um ganzzahlige Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{Z})$$

mit den jeweiligen Eigenschaften zu finden:

(i) Die Matrix ist über $K = \mathbb{Q}$ nicht diagonalisierbar, wohl aber über dem Körper $L = \mathbb{R}$.

(ii) Die Matrix ist über $K = \mathbb{R}$ nicht diagonalisierbar, wohl aber über dem Körper $L = \mathbb{C}$.

(iii) Die Matrix ist über $K = \mathbb{C}$ nicht diagonalisierbar, wohl aber über dem Körper $L = \mathbb{F}_2$.

Abgabe: Bis Montag, den 8. Januar um 10:25 Uhr im Zettelkasten.

Frohe Weihnachten und guten Rutsch!