Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 23/24

Übungen zu Lineare Algebra I

Blatt 9

Aufgabe 1. Wir betrachten die Abbildung

$$\det : \mathrm{Mat}_2(K) \longrightarrow K, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longmapsto ad - bc.$$

(i) Zeigen Sie durch ein Beispiel, dass die Abbildung die Addition nicht respektiert, also kein Homomorphismus von abelschen Gruppen ist.

(ii) Verifizieren Sie, dass die Abbildung jedoch ein Homomorphismus von multiplikativen Monoiden ist, also

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B) \quad \text{und} \quad \det(E) = 1.$$

Aufgabe 2. Wir betrachten die bijektive lineare Abbildung

$$\Psi : \mathrm{Mat}_n(K) \longrightarrow \mathrm{Mat}_n(K), \quad A \longmapsto {}^tA,$$

welche $A = (\alpha_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ auf die *transponierte Matrix* ${}^tA = (\alpha_{ji})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ schickt.

(i) Bestimmen Sie für $n = 2$ die Matrix von Ψ bezüglich der Standardbasis-Matrizen $E_{1,1}, E_{2,1}, E_{1,2}, E_{2,2}$ aus $\mathrm{Mat}_2(K)$.

(ii) Zeigen Sie durch ein Beispiel, dass die Abbildung Ψ für $n \geq 2$ die Matrizenmultiplikation nicht respektiert.

(iii) Verifizieren Sie, dass jedoch gilt:

$$\Psi(A \cdot B) = \Psi(B) \cdot \Psi(A) \quad \text{und} \quad \Psi(E) = 1.$$

Aufgabe 3. Wir betrachten nun die Linearform

$$\mathrm{tr} : \mathrm{Mat}_n(K) \longrightarrow K, \quad (\alpha_{ij})_{1 \leqslant i \leqslant n} \longmapsto \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ii},$$

welche eine Matrix $A \in \mathrm{Mat}_n(K)$ auf ihre *Spur* $\mathrm{tr}(A) \in K$ schickt.

(i) Zeigen Sie durch ein Beispiel, dass die Spurabbildung die Multiplikation im Allgemeinen nicht respektiert.

(ii) Verifizieren Sie die Formel $\mathrm{tr}(AB - BA) = 0$ für alle $A, B \in \mathrm{Mat}_n(K)$.

Aufgabe 4. Sei V ein K-Vektorraum und $V^{**} = (V^*)^*$ sein *Bidualraum.* Wir betrachten die *kanonische* Abbildung

$$f : V \longrightarrow V^{**}, \quad x \longmapsto (\varphi \mapsto \varphi(x)).$$

Hierbei ist $x \in V$ ein Vektor und $\varphi \in V^* = \mathrm{Hom}_K(V, K)$ eine Linearform.

(i) Verifizieren Sie, dass die Abbildung f linear ist.

(ii) Zeigen Sie, dass f injektiv ist.

(iii) Folgern Sie, dass f für endlich-dimensionale Vektorräume V sogar ein Isomorphismus ist.

Abgabe: Bis Montag, den 18. Dezember um 10:25 Uhr im Zettelkasten.