Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 23/24

Übungen zu Lineare Algebra I

Blatt 8

Aufgabe 1. Wir betrachten die Vektoren

$$a = (1, 2, 2, 0) \quad \text{und} \quad b = (3, 0, 10, 2) \quad \text{und} \quad c = (1, 2, 4, 1)$$

aus dem Standardvektorraum $V = \mathbb{Q}^4$. Entscheiden Sie mit dem Gauß-Algorithmus, ob die Vektoren $a, b, c \in V$ linear unabhängig sind.

Aufgabe 2. Wir betrachten den 4-dimensionalen Vektorraum $V = \mathrm{Mat}_2(\mathbb{C})$. Die folgenden vier Vorschriften

$$f_1\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} b & d \\ a & b-a \end{smallmatrix}\right), \quad f_2\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} a^2 & b \\ c & d^2 \end{smallmatrix}\right), \quad f_3\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 2b & 3a \\ 4c & 0 \end{smallmatrix}\right), \quad f_4\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} \bar{c} & 0 \\ 0 & a \end{smallmatrix}\right)$$

liefern Abbildungen $f_i : V \to V$. Welche davon sind linear?

Aufgabe 3. Sei $f : V \to W$ eine Abbildung zwischen K-Vektorräumen und

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)) \mid x \in V\} \subset V \times W$$

ihr Graph. Zeigen Sie, dass die Abbildung $f : V \to W$ linear ist genau dann, wenn die Teilmenge $\Gamma_f \subset V \times W$ ein Untervektorraum ist.

Aufgabe 4. Sei $U \subset \mathbb{R}[T]$ der Untervektorraum aller Polynome

$$P = P(T) = \lambda_4 T^4 + \lambda_3 T^3 + \ldots + \lambda_0$$

vom Grad höchstens vier. Wir betrachten die Abbildung

$$f : U \longrightarrow U, \quad P \longmapsto P' - T^2 P''.$$

wobei P' und P'' die erste bzw. zweite Ableitung bezeichne.

(i) Verifizieren Sie, dass die Abbildung f linear ist.

(ii) Wählen Sie eine Basis $P_0, \ldots, P_m \in U$ und bestimmen Sie somit die Dimension $n = m + 1$ von U.

(iii) Stellen Sie die Matrix $A \in \mathrm{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$ von f bezüglich dieser Basis auf.

Abgabe: Bis Montag, den 11. Dezember um 10:25 Uhr im Zettelkasten.