Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer

WS 23/24

Übungen zu Lineare Algebra I

Blatt 6

Aufgabe 1. Für welche Parameter $t \in \mathbb{R}$ werden die beiden Vektoren

$$a = (1, -2) \quad \text{und} \quad b_t = (t^2, 3t - 1)$$

in der Anschaungsebene $V = \mathbb{R}^2$ linear abhängig? Lösen Sie die Aufgabe zunächst in einem Spezialfall, indem Sie für t einen konkrete Wert ihrer Wahl einsetzen.

Aufgabe 2. Sei $V = \mathbb{R}[X]$ der reelle Vektorraum aller Polynome, $P = P(X)$ ein nicht-konstantes Polynom, und $P' = P'(X)$ seine Ableitung. Zeigen Sie, dass die Vektoren $P, P' \in V$ linear unabhängig sind.

Aufgabe 3. Sei $V = \mathscr{C}([0, 2\pi])$ der reelle Vektorraum aller stetigen Funktionen $[0, 2\pi] \to \mathbb{R}$. Wir fassen die trigonometrischen Funktionen

$$x \longmapsto \cos(x) \quad \text{und} \quad x \longmapsto \sin(x)$$

als Vektoren $\cos, \sin \in V$ auf. Zeigen Sie, dass diese beiden Vektoren linear unabhängig sind. Tipp: Benutzen Sie Nullstellen der trigonometrischen Funktionen.

Aufgabe 4. Sei V ein $\mathbb{C}$-Vektorraum und $a_1, \ldots, a_n \in V$ eine Basis. Sei weiterhin $z = x + iy$ eine komplexe Zahlen, dessen Imaginärteil nicht verschwinden. Beweisen Sie, dass die $2n$ Vektoren

$$a_1, za_1, a_2, za_2, \ldots, a_n, za_n$$

eine Basis von V bilden, wobei wir nun V als $\mathbb{R}$-Vektorraum auffassen. Was besagt das für $\dim_{\mathbb{R}}(V)$ und $\dim_{\mathbb{C}}(V)$?

Abgabe: Bis Montag, den 27. November um 10:25 Uhr im Zettelkasten.